دراسات فى التحليل الكمى

الجزء الأول

الأستاذ الدكتور

عادل عبد الحميد عز

١٩٩٤

دراسات فى التحليل الكمى

الجزء الاول

الأستاذ الدكتور

عادل عبد الحميد عز

١٩٩٤

مقدمة :

يتخذ الإنسان الكثير من القرارات في حياته اليومية ... ولكن يلاحظ أن بعض هذه القرارات يتخذ بطرق كيفيه تعتمد على خبرة الإنسان في الماضي والمعلومات المختزنة في عقله وبعض العناصر أو المعلومات الشخصية المتاحة ولكن من ناحية أخرى يمكن إتخاذ القرارات بالإعتماد على الأساليب الكمية أو ما يمكن أن نطلق عليه أساليب التحليل الكمي - وهي تعتمد بصفة أساسية على بعض الأساليب الرياضية والإحصائية وأساليب بحوث العمليات وما نطلق عليه علم الإدارة .

ومنذ الأزل والانسان يتخذ الكثير من القرارات بالطرق الرياضية بغض النظر عن مستوى الرياضيات المستخدمة - ولكننا نلاحظ التطور الكبير الذي حدث منذ بداية القرن الحالي وأدى الى التوسع في إستخدام الأساليب الرياضية في إتخاذ القرارات .

ومما لاشك فيه أن إكتشاف الحاسب الآلي وتطوره جيلاً بعد جيل أدى الى توسع كبير في إستخدام الأساليب الكمية أو الإعتماد عليها بصفة أساسية في إتخاذ القرارات الإدارية وكانت البداية على يد فردريك تيلور عند بداية هذا القرن ثم اتسع نطاق إستخدامها خلال الحرب العالمية الثانية .

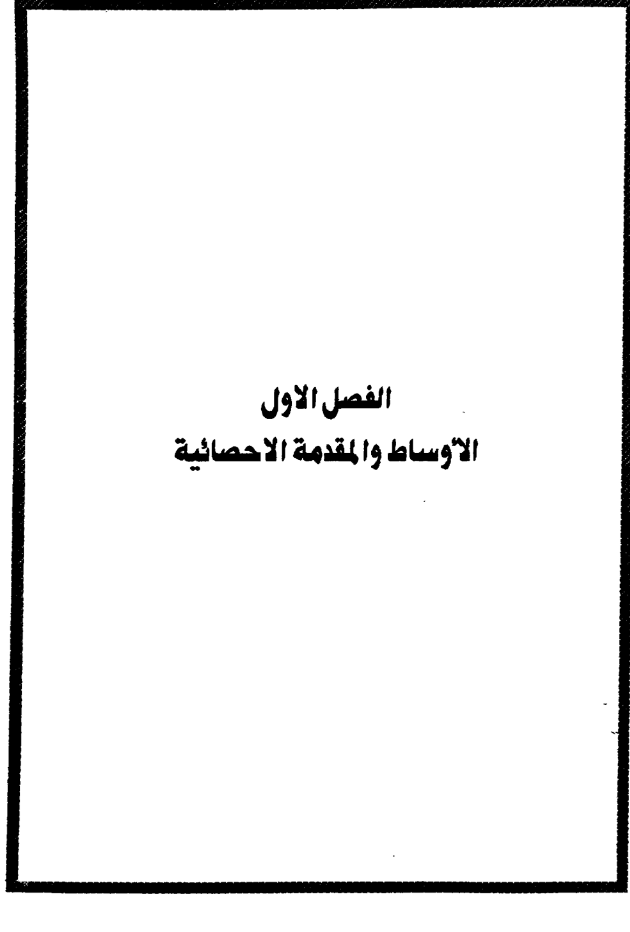
ومهما كانت درجة إعتمادنا على الأساليب الكمية في إتخاذ القرارات إلا أننا لا نستطيع أن نغفل الكثير من العوامل الشعبية والشخصية التي تحكم إتخاذ القرار فمثلاً عند الإعتماد على الأساليب الكميه لتقدير السكان في المستقبل .. هل نستطيع أن نغفل سياسة الدولة تجاه القضية السكانية ؟ - عند تقدير الدخل في المستقبل هل نستطيع أن نغفل الكثير من القرارات الإقتصادية التي تتخذها الدولة وتؤثر على هذه التقديرات ؟

وعموما فإنه من المستحيل الإعتماد على الأساليب الكمية في إتخاذ القرارات بدون توافر البيانات الإحصائية الدقيقة واللازمة والتي نعتمد عليها عند إتخاذ القرارات بإستخدام أساليب التحليل الكمي ونظم دعم القرارات .

كما تجدر الإشارة إلى نظم المعلومات الإدارية السليمة والتي تعتبرها الطريق المنظم للحصول على المعلومات الصحيحة لكل من يحتاج اليها من رجال الإدارة في الوقت المناسب والمكان المناسب .

وقد رأيت من واجبي أن أسجل بعض المعلومات اللازمة لأساليب التحليل الكمي من رياضية وإحصائية لطلاب الإدارة .

والله ولي التوفيق ،،،،



الفصل الاول

الأوساط والمقدمة الاحصائية

الفصل الأول

مقاييس النزعة المركزية

يهتم علم الإحصاء بتجميع البيانات الإحصائية عن ظاهرة معينة ثم تبويب هذه البيانات وعرضها بأسلوب لائق يستفيد منه متخذ القرار ثم تحليل هذه البيانات وسنهتم في هذا الفصل بمقاييس النزعة المركزية Measures of Central Tendency

توجد أنواع كثيرة من المتوسطات أهمها :

١- الوسط الحسابي Mean :

الوسط الحسابي $\bar{س}$ لمجموعة من القيم $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ .... ، $س_ن$

$$= \frac{مجـ\ س}{ن}$$

مثال ١ :

إذا أخذنا دخول الافراد أ ، ب ، جـ ، د . هـ وكانت ٥٠٠، ١٥٠٠، ١٠٠٠ . ١٨٠٠ ، ٢٠٠

وأن الوسط الحسابي $\bar{س}$ = $\frac{٥٠٠ + ١٥٠٠ + ١٠٠٠ + ١٨٠٠ + ٢٠٠}{٥}$ = ١٠٠٠ جنية

٢- وكذلك نجد أن مجموع إنحرافات هذه القيم عن الوسط = صفر

كل قيمة قد تتساوى مع الوسط الحسابي مثل دخل جـ = ١٠٠٠ جنية أو تقل عنه مثل دخل أ = ٥٠٠ جنيه ، هـ = ٢٠٠ جنية أو تزيد عنه مثل دخل كل من ب ، د = ١٥٠٠ ، ١٨٠٠ على الترتيب .

ولكن إذا قمنا بحساب مجمل إنحرافات قيم دخل كل فرد عن الوسط الحسابى لوجدنا أن المجموع = صفر .... كما يتضح من الجدول التالى :

الافراد	الدخول	الإنحراف عن الوسط الحسابى
أ	٥٠٠	- ٥٠٠
ب	١٥٠٠	+ ٥٠٠
جـ	١٠٠٠	صفر
د	١٨٠٠	+ ٨٠٠
هـ	٢٠٠	- ٨٠٠
		صفر

وهى ظاهرة عامة مهما كانت قيم المفردات .

ومن الظواهر الهامة أيضا اننا يمكن أن نختار وسطا فرضيا ، ثم نحصل على مجموع إنحرافات قيم المفردات عن هذا الوسط الفرضى .

الوسط الفرضى = ض

الإنحراف = ح

$$\text{الوسط الحسابى} = ض + \frac{\text{مجـ ح}}{ن}$$

فى المثال السابق :

نفرض أننا قدرنا الوسط الفرضى بمبلغ ٩٠٠ جنيه .: ض = ٩٠٠ جنية

إنحرافات أ ، ب ، جـ ، د ، هـ عن الوسط الفرضى =

- ٤٠٠ + ٦٠٠ + ١٠٠ + ٩٠٠ - ٧٠٠ = ١٦٠٠ - ١١٠٠ = ٥٠٠

الوسط الحسابي = ض + $\frac{\text{مجـ ح}}{\text{ن}}$

$= ٩٠٠ + \frac{٥٠٠}{٥} = ٩٠٠ + ١٠٠ = ١٠٠٠$

الوسط الحسابي للبيانات المبوبة :

فيما يلي جدول توزيع تكراري لدخول ١٠٠٠ عامل في أحد الفنادق شهرياً :

فئـــــات	عدد العاملين ك	مركز الفئة ف	ف × ك
اقل من ٥٠٠	٥٠	٢٥٠	١٢٥٠٠
٥٠٠ واقل من ١٠٠٠	١٠٠	٧٥٠	٧٥٠٠٠
١٠٠٠ واقل من ١٥٠٠	٥٠٠	١٢٥٠	٦٢٥٠٠٠
١٥٠٠ واقل من ٢٠٠٠	٢٠٠	١٧٥٠	٣٥٠٠٠٠
٢٠٠٠ واقل من ٢٥٠٠	١٠٠	٢٢٥٠	٢٢٥٠٠٠
٢٥٠٠ واقل من ٣٠٠٠	٥٠	٢٧٥٠	١٣٧٥٠٠
	١٠٠٠		١٤٢٥٠٠٠

الوسط الحسابي = $\frac{١٤٢٥٠٠٠}{١٠٠٠}$ = ١٤٢٥

الوسيط

الوسيط هو القيمة الوسطى ....

مثال :

إذا كانت دخول أ ، ب ، جـ ، د ، هـ هى ٣٠٠ ، ٢٠٠ ، ١٥٠ ، ٤٠٠ ، ٢٥٠ فإنه للحصول على الوسيط يجب أن ترتب قيم المفردات إما تصاعدياً أو تنازلياً

الترتيب التصاعدى للقيم : ١٥٠ ، ٢٠٠ ، ٢٥٠ ، ٣٠٠ ، ٤٠٠ وحيث أن عدد المفردات فردى = ٥ فإن الوسيط هو قيمة المفردة رقم ٣ = ٢٥٠ جنية .

وإذا فرضنا في المثال السابق أن عدد المفردات = رقم زوجى ٦ مثلاً .... فإن قيمة الوسيط هى متوسط قيمتى المفردة رقم ٣ ، رقم ٤ كما يلى :

دخـــول الافـــراد هى أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و = ١٥٠ ، ٢٠٠ ، ٣٠٠ ، ٦٠٠ ، ٥٥٠ ، ٤٠٠

ترتيب القيم تصاعدياً ١٥٠ ، ٢٠٠ ، ٣٠٠ ، ٤٠٠ ، ٥٥٠ ، ٦٠٠

الوسيط متوسط قيم المفردتين الثالثة والرابعة = $\frac{١}{٢}$ (٣٠٠ + ٤٠٠) = ٣٥٠

الحصول على قيمة الوسيط للبيانات المبوبة

في هذه الحالة نجد أن مجموع التكرارات هى التى تمثل عدد المفردات - فإذا كان لدينا جدول التوزيع التكرارى لأجور ١٠٠ عامل فى أحد المصانع (وهو عدد زوجى) والمفردة رقم ٥١ وبهذا تكون هناك ٤٩ مفردة منها أقل ، ٤٩ مفردة قيمها أكبر من الوسيط .... كما يتضح من المثال الآتى :

فئات الدخول اليومية بالجنية	النكرار
صفر - أقل من ١٠	٥
١٠ - ٢٠	١٥
٢٠ - ٣٠	٣٥ (الفئة الوسيطة)
٣٠ - ٤٠	٢٥
٤٠ - ٥٠	٢٠
	١٠٠

من الواضح أن الفئة الوسيطة هى الفئة من ٢٠ الى أقل من ٣٠ جنية لأن عدد التكرارلت قبلها = ٥ + ١٥ = ٢٠ وبعدها = ٢٥ + ٢٠ = ٤٥

ولكن عندما ننتقل من الفئة الثانية الى الفئة الثالثة فيكون التكرار المجمع للثلاث فئات = ٥ + ١٥ + ٣٥ = ٥٥ ... وعلى ذلك فقيمة المفردة رقم ٥٠ والمفردة رقم ٥١ تكون موجودة فى هذه الفئة ٢٠ الى أقل من ٣٠ ولذلك تسمى هذه الفذة بالفئة الوسيطة أى الفئة التى يوجد بها الوسيط وهذه الفئة الوسيطة تحتوى على ٣٥ مفردة .

مجموع المفردات للفئتين الأولى والثانية = ٥ + ١٥ = ٢٠

للحصول على قيمة المفردة رقم ٥٠ يبقى لنا

٥٠ مفردة - ٢٠ مفردة = ٣٠ مفردة قيمة المفردة رقم ٥٠ بالنسبة والتناسب

= ٣٠ جنية - ٢٠ جنية × $\frac{٣٠}{٣٥}$

= ١٠ جنية × $\frac{٣٠}{٣٥}$ = ٨,٥٨ جنية

قيمة المفردة رقم ٥٠ = ٢٠ جنية (الحد الأدنى للفئة الوسيطة) = ٨,٥٨ = ٢٨,٥٨ جنية

للحصول على قيمة المفردة رقم ٥١ يطرح ٢٠ تكرار للفئتين الأولى والثانية من ٥١ نحصل على ٣١

تكرارات الفئة الوسيطة = ٣٥

الوسيط = الحد الأدنى للفئة الوسيطة + طول الفئة الوسيطة × $\frac{٣١}{٣٥}$

= ٢٠ + ١٠× $\frac{٣١}{٣٥}$ = ٢٨,٨٦

الوسيط = $\frac{١}{٢}$ (٢٨,٥٨ + ٢٨,٨٦) = ٢٨,٧٢ جنية

ويمكن الوصول الى هذا الرقم بإستخدام التكرار المتجمع الصاعد كما يلي :

الفئات	التكرارات	الحدود العليا للفئات	التكرار المتجمع الصاعد
صفر - ١٠	٥	أقل من ١٠	٥
١٠ - ٢٠	١٥	أقل من ٢٠	٢٠
٢٠ - ٣٠	٣٥	أقل من ٣٠	٥٥ ـــ فئة الوسيط
٣٠ - ٤٠	٢٥	أقل من ٤٠	٨٠
٤٠ - ٥٠	٢٠	أقل من ٥٠	١٠٠
	١٠٠		

المنوال للبيانات المبوبة

مثال :

أحسب المنوال من جدول التوزيع التكرارى التالى :

الفئـــــات	التكرار	
صفر الى أقل من ١٠	٥	
١٠ - ٢٠	١٥	
٢٠ - ٣٠	٣٥	----- فئة المنوال
٣٠ - ٤٠	٢٥	
٤٠ - ٥٠	٢٠	
	١٠٠	

المنوال = م والحد الأدنى لفئة المنوال = ل

تكرار فئة المنوال = ك

تكرار فئة المنوال - تكرار الفئة السابقة للمنوال = $ك_١$ = ٢٠

تكرار فئة المنوال - تكرار الفئة اللاحقة للمنوال = $ك_٢$ = ١٠

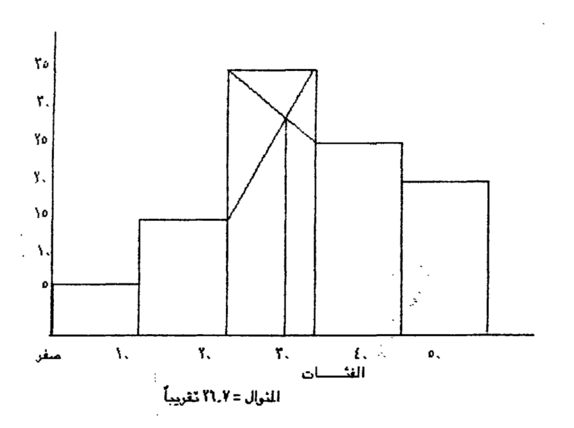
مدى قيمة المنوال = د

فإن :

$$\text{المنوال م} = ل + د \times \frac{ك_١}{ك_١ + ك_٢}$$

$$= ٢٠ + ١٠ \times \frac{٢٠}{٢٠ + ١٠} = ٢٠ + ٦,٦٧ = ٣٦,٦٧$$

كما يمكن حساب قيمة المنوال بالرسم البيانى كما يلى :



المنوال = ٢٦.٧ تقريباً

بالإضافة الى الوسط الحسابى والوسيط والمنوال توجد أوساط أخرى .....

الوسط الحسابى المرجح بأوزان معينة

بفرض أنك تستهلك السلع أ ، ب ، جـ بتكلفة للوحدة قدرها ١٠ ، ٧ ، ١٣ جنية على الترتيب للوحدة فإنك تقول بأن الوسط الحسابى لمتوسط تكلفة الوحدة

= (١٠ + ٧ + ١٣) ÷ ٣ = ١٠

ولكن هذا الرقم قد يكون مضللاً إذا كان هناك إختلاف فى الكميات المستهلكة من كل نوع فإذا كان الإستهلاك من الانواع الثلاثة = ١٥ ، ٥ ، ٨٠ على الترتيب فإن المفروض أن يقترب الوسط من رقم ١٣ والذي يمثل المستهلك منه ٨٠٪ من حجم الإستهلاك الكلى ولهذا يمكن ترجيح الارقام المشار اليها وهى ١٠ ، ٧ ، ١٣ بأرقام الإستهلاك ١٥ ، ٥ ، ٨٠ هكذا

$$\text{الوسط الحسابى المرجح} = \frac{\text{مجـ كل قيمة} \times \text{وزنها}}{\text{مجموع الأوزان}}$$

$$= \frac{(١٠\times١٥) + (٧\times٥) + (١٣\times٨٠)}{١٥ + ٥ + ٨٠} = \frac{١٢٦٥}{١٠٠} = ١٢,٦٥$$

ولا شك أن هذه القيمة أكثر تعبيراً عن الوسط من الوسط الحسابى غير المرجح

الوسط الهندسى

الوسط الهندسى لأى مجموعة من القيم =

$\sqrt[n]{\text{حاصل ضرب هذه القيم}}$ التى عددها ن

مثال : أوجد الوسط الهندسى للكميات : ١٢ ، ٩ ، ٤ ، ٣

الوسط الهندسى = الجذر الرابع لحاصل ضرب هذه القيم

$\sqrt[4]{١٢ \times ٩ \times ٤ \times ٣} = ٦$

ويستخدم الوسط الهندسى عادة لحساب متوسط معدل التغير ...

فيما يلى جدول التوزيع التكرارى لأجور العاملين فى إحدى الشركات شهرياً ..
المطلوب حساب الوسط الحسابى والوسيط والمنوال والمقارنة بين الأوساط الثلاثة :

فئات الأجور الشهرية بالجنيهات	التكرار
١٠٠ - ١٥٠	٥٠
١٥٠ - ٢٠٠	١٠٠
٢٠٠ - ٢٥٠	١٥٠
٢٥٠ - ٣٠٠	٣٠٠
٣٠٠ - ٣٥٠	٢٠٠
٣٥٠ - ٤٠٠	١٠٠
٤٠٠ - ٤٥٠	٧٥
٤٥٠ - ٥٠٠	٢٥
	١٠٠٠

الحل : أولاً الوسط الحسابى

١- بالطريقة المطولة :

ف الفئات	ك التكرار	س مراكز الفئات	س × ك
١٠٠ - ١٥٠	٥٠	١٢٥	٦٢٥٠
١٥٠ - ٢٠٠	١٠٠	١٧٥	١٧٥٠٠
٢٠٠ - ٢٥٠	١٥٠	٢٢٥	٣٣٧٥٠
٢٥٠ - ٣٠٠	٣٠٠	٢٧٥	٨٢٥٠٠
٣٠٠ - ٣٥٠	٢٠٠	٣٢٥	٦٥٠٠٠
٣٥٠ - ٤٠٠	١٠٠	٣٧٥	٣٧٥٠٠
٤٠٠ - ٤٥٠	٧٥	٤٢٥	٣١٨٧٥
٤٥٠ - ٥٠٠	٢٥	٤٧٥	١١٨٧٥
	١٠٠٠		٢٨٦٢٥٠

$$\text{الوسط الحسابى} = \frac{\text{مجـ س × ك}}{\text{مجـ ك}} = \frac{٢٨٦٢٥٠}{١٠٠٠} = ٢٨٦,٢٥٠$$

٢- الحل بالطريقة المختصرة :

ف الفئات	ك التكرار	س مراكز الفئات	ح	حَ	حَ ك
١٠٠ - ١٥٠	٥٠	١٢٥	- ٢٠٠	٤-	- ٢٠٠
١٥٠ - ٢٠٠	١٠٠	١٧٥	-١٥٠	٣-	-٣٠٠
٢٠٠ - ٢٥٠	١٥٠	٢٢٥	-١٠٠	٢-	-٣٠٠
٢٥٠ - ٣٠٠	٣٠٠	٢٧٥	-٥٠	١-	-٣٠٠
٣٠٠ - ٣٥٠	٢٠٠	٣٢٥	صفر	صفر	صفر
٣٥٠ - ٤٠٠	١٠٠	٣٧٥	٥٠	١	١٠٠
٤٠٠ - ٤٥٠	٧٥	٤٢٥	١٠٠	٢	١٥٠
٤٥٠ - ٥٠٠	٢٥	٤٧٥	١٥٠	٣	٧٥
	١٠٠٠				-١١٠٠ + ٣٢٥ -------- - ٧٧٥

في الحالة السابقة إخترنا وسطاً فرضيا مقداره ٣٢٥ وقمنا بحساب إنحرافات مراكز الفئات عن هذا الوسط الفرضي (ح) ثم إختصرنا هذه الإنحرافات بقسمة كل إنحراف على رقم ثابت هو ٥٠ (طول الفئة) وحصلنا على حَ .

مجموع حَ ك = - ١١٠٠ + ٣٢٥ = - ٧٧٥

وحيث أننا قسمنا كل إنحراف على ٥٠ نعود فنضرب مجموع الإنحرافات × ٥٠

مرة أخرى - ٧٧٥ × ٥٠ = - ٣٨٧٥٠

متوسط الانحراف = - ٣٨٧٥٠ ÷ ١٠٠٠ (مجموع التكرارات) = - ٣٨,٧٥٠

الوسط الحسابي = الوسط الفرضي ٣٢٥ + (- ٣٨,٧٥٠) = ٢٨٦,٢٥ وهي نفس النتيجة السابقة .

ثانيا الوسيط :

ف الفئات	ك التكرار	
١٠٠ - ١٥٠	٥٠	
١٥٠ - ٢٠٠	١٠٠	
٢٠٠ - ٢٥٠	١٥٠	
٢٥٠ - ٣٠٠	٣٠٠	الفئة الوسيطية
٣٠٠ - ٣٥٠	٢٠٠	
٣٥٠ - ٤٠٠	١٠٠	
٤٠٠ - ٤٥٠	٧٥	
٤٥٠ - ٥٠٠	٢٥	
	١٠٠٠	

الوسيط = الحد الأدنى للفئة الوسيطية + طول الفئة × $\frac{٢٠٠}{٣٠٠}$

= ٢٥٠ + ٥٠ × $\frac{٢}{٣}$ = ٢٥٠ + ٣٣,٣

= ٢٨٣,٣

ملاحظات :

مجموع التكرارات = ١٠٠٠

ترتيب الوسيط = ١٠٠٠ ÷ ٢ = ٥٠٠

مجموع تكرارات الفئات الأولى والثانية والثالثة = ٥٠ + ١٠٠ + ١٥٠ = ٣٠٠

تكرار الفئة الوسيطية = ٣٠٠

لكي نصل الى ترتيب الوسيط نحتاج الى ٢٠٠ بالاضافة الى تكرارات الفئات السابقة للفئة الوسيطية وهي ٣٠٠ ، وحيث أن تكرار الفئة الوسيطية = ٣٠٠ نقسم طول الفئة الوسيطية نفسه ٢٠٠ : ٣٠٠

ثالثاً : المنوال

١ - بالاسلوب الرياضي

قيمة المنوال = الحد الادنى لفئة المنوال + طول فئة المنوال ×

$$\frac{\text{تكرار فئة المنوال - تكرار الفئة السابقة}}{\text{تكرار فئة المنوال - تكرار الفئة السابقة + تكرار فئة المنوال - تكرار الفئة اللاحقة}}$$

كما سبق الإشارة اليه

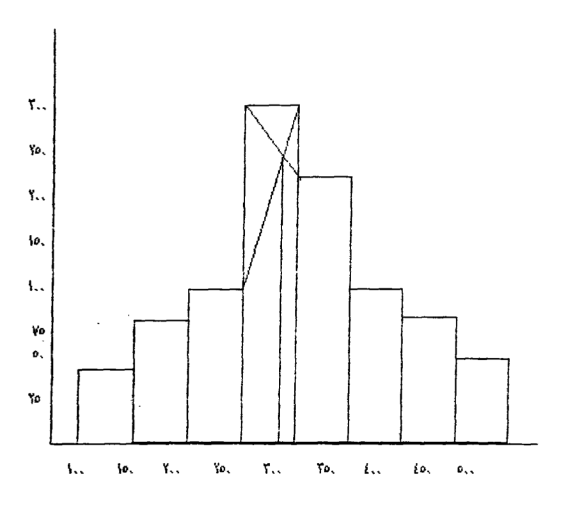
$$م = ل + د \times \frac{ك_1}{ك_1 + ك_2}$$

$$= ٢٥٠ + ٥٠ \times \frac{٣٠٠ - ١٥٠}{٣٠٠ - ١٥٠ + ٣٠٠ - ٢٠٠}$$

$$= ٢٥٠ + ٥٠ \times \frac{١٥٠}{٢٥٠}$$

$$= ٢٥٠ + ٣٠ = ٢٨٠$$

٢- باستخدام الرسم البياني :



المنوال من الرسم حوالى ٢٨٠

مقاييس التشتت
Measures of Dispersion

إذا إتخذنا قيم المفردات ٣ ، ٤ ، ٥ لكان متوسط هذه القيم = ٤ وإذا أخذنا قيم المفردات ١، ٢ ، ٩ لكان المتوسط = ٤ أيضا ولكن يلاحظ فى الحالة الأولى أن قيم المفردات متقاربة مع بعضها البعض ومع الوسط الحسابى لهذه القيم وذلك عكس الحالة الثانية - وعلى ذلك فأن مقاييس النزعة المركزية وحدها لا تكفى لدراسة الظواهر المختلفة - ولهذا فإن مقاييس التشتت هى المقاييس التى تقيس لنا مدى تقارب قيم المفردات المختلفة من قيم الوسط الحسابى وبالتالى من بعضها البعض أو مدى التباعد - فقد يتساوى متوسط نصيب الفرد من الدخل فى الشركة أ مع الشركة ب ولكن قد يوجد تقارب فى دخول الأفراد فى الشركة أ ، وتباعد بين دخول الأفراد فى الشركة ب .

وسنوضح أهم مقاييس التشتت :

(١) المدى RANGE

وهو عبارة عن الفرق بين أكبر وأصغر قيمة من قيم المفردات - فإذا كان أقل أجر فى الشركة = ١٥٠ جنيه شهرياً وأكبر أجر = ١٨٥٠ جنيه شهريا .

فإن المدى = ١٨٥٠ - ١٥٠ = ١٧٠٠

والمدى لا يستخدم عادة كمقياس من مقاييس التشتت لأنه يتوقف على قيمتين فقط فمثلاً يمكن أن نوضح ذلك بمثالين :

الأرقام ١٥٠٠ ، ١٤٠٠ ، ١٢٠٠ ، ١١٠٠ ، ٩٥٠ ، ٨٠٠ ، ١٠٠

المدى = ١٥٠٠ - ١٠٠ = ١٤٠٠

وكذلك ١٥٠٠ ، ١٥٠ ، ١٢٠ ، ١١٠ ، ١٠٥ ، ١٠٣ ، ١٠٠

المدى = ١٥٠٠ - ١٠٠ = ١٤٠٠

وكذلك الأرقام ١٠٠ ، ١٣١٠ ، ١٤٥٠ ، ١٤٨٠ ، ١٤٩٠ ، ١٤٩٥ ، ١٥٠٠

المدى = ١٥٠٠ - ١٠٠ = ١٤٠٠

من الواضح أن المدى لا يقيس لنا حقيقة التقارب أو التباعد لقيم المفردات عن وسطها الحسابى .

فهو يهتم بالفرق بين قيمتين فقط من قيم المفردات دون الأهتمام بالقيم الأخرى للمفردات .

(٢) المدى بين تشتتين Interfractile range

حتى يمكن فهم هذا الموضوع نفرض أننا بصدد دراسة الدخل الأسبوعى لبعض العمال وعددهم ١٢ عاملاً وكانت النتائج كما يلى :

١٢٠ ، ٤٠ ، ٥٠ ، ٣٠ ، ٦٠ ، ٢٠ ، ٧٠ ، ٨٠ ، ٧٠ ، ٩٠ ، ٤٠ ، ٥٠

الوسط الحسابى لهذه القيم = مجموع المفردات مقسومة على ١٢ = ٦٠

والمدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة = ١٢٠ – ٢٠ = ١٠٠ جنيه

ويمكن ترتيب قيم المفردات تصاعدياً أو تنازلياً

الترتيب التصاعدى = ٢٠ ، ٣٠ ، ٤٠ ، ٤٠ ، ٥٠ ، ٥٠ ، ٦٠ ، ٧٠ ، ٧٠ ، ٨٠ ، ٩٠ ، ١٢٠

والوسيط مثلاً هو القيمة الوسطى أى قيمة المفردة التى يكون عدد المفردات التى تزيد عنها فى القيمة = عدد المفردات التى تقل عنها فى القيمة .

وحيث أن عدد المفردات = ١٢ وهو عدد زوجى فنأخذ متوسط القيمين رقم ٦ ، ٧ = (٥٠ + ٦٠) ÷ ٢ = ٥٥ جنية .

ويمكن أن نختار النسبة ٢٥ ٪ بدلاً من ٥٠ ٪ فنختار نقطة مثلاً بحيث تكون عدد المفردات التى تقل عنها فى القيمة = ٢٥ ٪ من عدد المفردات وكذلك يمكن أن نختار هذه القيمة التى يقع ترتيبها تصاعدياً عند ثلث القيم والقيمة التى تقع ترتيبها تصاعدياً عند ثلثى القيم .

ونوجد المدى بين القيمة التى تقع عند ثلث عدد المفردات والقيمة التى تقع تصاعديا عند ثلثى عدد المفردات .

فى المثال السابق عن أجور العمال الأسبوعية

نجد أن عدد المفردات = ١٢

ثلث عدد المفردات = ٤ ، وقيمة المفردة رقم ٤ = ٤٠

وقيمة المفردة التى يقع ترتيبها تصاعديا عند ثلثى عدد المفردات

وهى المفردة رقم ٨ (١٢× ثلثين) = ٧٠

فإذا أردنا الآن الحصول على المدى بين قيمة المفردة التى تقع فى الثلث الأول تصاعدياً وقيمة المفردة التى تقع عند الثلث الثانى تصاعدياً

فإن قيمةالمدى = ٧٠ – ٤٠ = ٣٠

كما يتضح من الجدول التالى :

الثلث الأول		الثلث الثانى		الثلث الثالث
٢٠		٥٠		٧٠
٣٠		٥٠		٨٠
٤٠		٦٠		٩٠
٤٠	$\frac{١}{٣}$	٧٠	$\frac{٢}{٣}$	١٢٠

الإنحراف الربيعى = نصف المدى الربيعى

$$\frac{(ع٣ - ع١)}{٢}$$

(٣) الإنحراف الربيعى QUARTIE DEVIATION

$$\frac{\text{قيمة المفردة التى ترتيبها عند الربع الثالث – قيمة المفردة التى ترتيبها عند الربع الأول}}{٢}$$

$$\frac{ع٣ - ع١}{٢} \qquad \frac{Q3 - Q1}{2}$$

فى المثال السابق :

الربع الأول	الربع الثانى	الربع الثالث	الربع الرابع
٢٠	٤٠	٦٠	٨٠
٣٠	٥٠	٧٠	٩٠
٤٠	الربع الأول ٥٠	٧٠ – الربع الثالث	١٢٠

ع٣ = ٧٠ ، ع١ = ٤٠

$$\text{نصف المدى الربيعى} = \frac{٧٠ - ٤٠}{٢} = \frac{٣٠}{٢} = ١٥$$

٤- متوسط إنحراف القيم عن الوسط الحسابى مع إهمال الإشارات

فى المثال السابق نجد أن قيم المفردات هى :

٢٠ ، ٣٠ ، ٤٠ ، ٤٠ ، ٥٠ ، ٥٠ ، ٦٠ ، ٧٠ ، ٧٠ ، ٨٠ ، ٩٠ ، ١٢٠

والوسط الحسابى = ٦٠

ولو أننا حسبنا متوسط الإنحراف عن الوسط الحسابى آخذ الإشارات فى

الأعتبار لكان متوسط الإنحرافات = صفر ولهذا تهمل الإشارات ويكون

$$\text{الإنحراف المتوسط} = \frac{\text{مجـ} |\text{س} - \bar{\text{س}}|}{\text{ن}}$$

حيث سَ الوسط الحسابى ، س قيمة كل مفردة ، ن عدد المفردات .

$$\frac{٤٠ + ٣٠ + ٢٠ + ٢٠ + ١٠ + ١٠ + \text{صفر} + ١٠ + ١٠ + ٢٠ + ٣٠ + ٦٠}{١٢}$$

$$\frac{٢٦٠}{١٢} = ٢١,٦٧$$

٥- التباين Variation
والإنحراف المعيارى Standard deviation

بدلا من اهمال الاشارات فإننا سنقوم بتربيع القيم والحصول على متوسط مجموع مربعات إنحرافات القيم عن وسطها الحسابى .

وهو ما نسميه بالتباين والانحراف المعيارى هو الجذر التربيعى للتباين كما يتضح من المثال الآتى :

قيم المفردات	ح	ح ٢
٢٠	-٤٠	١٦٠٠
٣٠	-٣٠	٩٠٠
٤٠	-٢٠	٤٠٠
٤٠	-٢٠	٤٠٠
٥٠	-١٠	١٠٠
٥٠	-١٠	١٠٠
٦٠	صفر	صفر
٧٠	١٠	١٠٠
٧٠	١٠	١٠٠
٨٠	٢٠	٤٠٠
٩٠	٣٠	٩٠٠
١٢٠	٦٠	٣٦٠٠
		٨٦٠٠

$$\text{التباين} = \frac{٨٦٠٠}{١٢} = ٧١٦,٦٧$$

$$\text{الانحراف المعيارى} = \sqrt{٧١٦,٦٧} = ٢٦,٧٧$$

والتباين يرمز له بالرمز س٢

والانحراف المعيارى س

$$س = \sqrt{س^2} = \sqrt{\frac{مجـ(س - \bar{س})^2}{ن}}$$

إيجاد التباين والإنحراف المعيارى للبيانات المبوبة

توزيع درجات ١٠٠ طالب فى مادة الإحصاء

فئات الدرجات ف	عدد الطلاب ك	مراكز الفئات س	ك×س	$س - \bar{س}$	$(س - \bar{س})^2$	$ك(س - \bar{س})^2$
صفر : اقل من ٢٠	١٠	١٠	١٠٠	٣٥-	١٢٢٥	١٢٢٥٠
٢٠ - ٤٠	٢٥	٣٠	٧٥٠	١٥-	٢٢٥	٥٦٢٥
٤٠ -	٥٠	٥٠	٢٥٠٠	٥	٢٥	١٢٥٠
٦٠-	١٠	٧٠	٧٠٠	٢٥	٦٢٥	٦٢٥٠
٨٠-	٥	٩٠	٤٥٠	٤٥	٢٠٢٥	١٠١٢٥
	١٠٠		٤٥٠٠			٣٥٥٠٠

$$\bar{س} = \frac{٤٥٠٠}{١٠٠} = ٤٥$$

$$التباين = \frac{٣٥٥٠٠}{١٠٠} = ٣٥٥$$

$$= \sqrt{٣٥٥} = ١٨,٨٤$$

	ح	ح٢
١٠	-١٥	٢٢٥
١٥	-١٠	١٠٠
٢٥	- صفر	صفر
٢٠	-٥	٢٥
٣٠	٥	٢٥
٢٠	-٥	٢٥
٢٠	-٥	٢٥
٦٠	٣٥	١٢٢٥
٢٠٠		١٦٥٠

$$\text{س}^{2} = \frac{١٦٥٠}{٨} = ٢٠٦,٢٥$$

$$\text{س} = \sqrt{٢٠٦,٢٥} = ١٤,٣٦$$

ملخص لأهم القوانين

١ - المدى = قيمة أعلى مفردة - قيمة أصغر مفردة

٢- المدى الربيعى = $ع_٣ - ع_١$

قيمة الربع الثالث - قيمة الربع الأول

٣- الإنحراف الربيعى = نصف المدى الربيعى

$$= \frac{١}{٢} (ع_٣ - ع_١)$$

٤- متوسط الإنحراف = $مجـ \frac{س - \bar{س}}{ن}$

مع إهمال الإشارات ·

٥- التباين = $س^٢$ = $مجـ \frac{(س - \bar{س})^٢}{ن}$

٦- الإنحراف المعيارى = $\sqrt{للتباين}$

$$= \sqrt{مجـ \frac{(س - \bar{س})^٢}{ن}}$$

الفصل الثانى
نظرية الاحتمالات

الفصل الأول

مقدمة

Sets and subsets

المجموعات والمجموعات الفرعية [الفئات والفئات الجزئية]

ليس من الصعب علينا أن نتبين أن الطالب بكلية التجارة جامعة القاهرة ينتمى إلى مجموعة طلاب كلية التجارة وكلية التجارة نفسها تنتمى إلى مجموعة كليات جامعة القاهرة وجامعة القاهرة تنتمى إلى مجموعة جامعات جمهورية مصر العربية.

وفى العلوم الرياضية نهتم فى كثير من الأحوال بالمجموعات أى بمجموعة من الأشياء وبعض هذه المجموعات قد تكون صغيرة كمجموعة من الأفراد الذين يكونون إدارة صغيرة وقد تكون هذه المجموعة كبيرة كما لو قلنا مثلا مجموعة الأسماك الموجودة فى إحدى البحيرات

وسنستخدم كلمة مجموعة فى الرياضة Set للدلالة على جمع من الأشياء — والأشياء الموجودة بالمجموعة ستطلق عليها عناصر أو أعضاء المجموعة .

فعندما نتكلم عن مجموعة طلبة كلية التجارة فإن كل طالب بالكلية يعتبر عنصرا من عناصر المجموعة .

ويمكن أن نعبر عن المجموعة بالطريقة التالية ا = (طلبة كلية التجارة جامعة القاهرة) .

أو ا = (١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، .....)

ومعنى هذا أن ا هى المجموعة التى عناصرها الأعداد الفردية ١ ، ٣ ، ٥ ... والنقط هنا تعنى الاستمرار .

ومن الممكن إستخدام عبارة لوصف عناصر المجموعة فنقول مثلا .

ب = (كليات جامعة القاهرة) بدلا من ذكر أسماء الكليات .

فالعبارة هنا تصف العامل المشترك لجميع أفراد المجموعة .

وفى الأمثلة السابقة يمكن أن نقول بأن
رقم ٣ هو عنصر من عناصر المجموعة أ

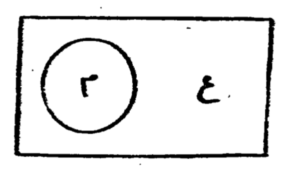
ويمكن أن نعبر عن ذلك باستخدام الحرف اليونانى epsilon ∈ فنقول .

٣ ∈ أ

و ∈ هنا معناها عنصر من عناصر أى اختصار لهذه العبارة كما نقول ٣ ∉ أ
أى ٣ ليست عنصرا من عناصر أ

وكذلك يمكن أن نقول بأن سكان محافظة الشرقية يكونون مجموعة وسكان محافظة القاهرة يكونون مجموعة وسكان محافظة الإسكندرية يكونون مجموعة وكل هذه المجموعات عبارة عن مجموعات فرعية من المجموعة التى تمثل جميع سكان مصر .

وكلمة Set بمعنى مجموعة يمكن أن نطلق عليها Space وكلمة Subset بمعنى مجموعة فرعية Subspace وكل مصرى عربى وهذه حقيقة فلو مثلنا العرب بمستطيل والمصريين بدائرة فيمكن أن نعبر عن هذه الحقيقة هندسيا كما يلى



التعاريف الأساسية

١ – تتكون المجموعة Set من عدة عناصر تربطها ببعضها البعض صفة أو خاصية معينة هي التي تحدد تعريف المجموعة .

٢ – لكي نحدد إنتماء عنصر معين إلى مجموعة معينة فاننا نستخدم الحرف اليوناني ∈ فنقول مثلا أن م ∈ ا أي أن م هو عنصر من عناصر المجموعة ا وإذا شطبنا ∉ فإن هذا يعني عدم انتماء العنصر للمجموعة .

فنقول م ∉ ا أي م ليست عنصراً من عناصر المجموعة ا

٣ – إذا كانت المجموعة خالية من العناصر فإننا نطلق عليها المجموعة الصفرية أو المجموعة الفارغة ويمكن أن نعبر عنها بالرمز الأسكنديناني ϕ كما يمكن أن نعبر عن عدم إحتواء المجموعة لعناصر بكتابة قوسين فارغين [ ] أو بالحرف اليوناني Φ « في » .

ومن الأمثلة على المجموعة الصفرية مثلا مجموعة الرجال الذين عاشوا لمدة تزيد عن ٥٠٠ سنة .

أو مجموعة الحلول الحقيقية للمعادلة س^{٢} = – ١

كما يجب أن نفرق بين [ ] وتعني المجموعة الصفرية أو الخالية وبين [صفر] لأن هذه الأخيرة تعني أن لها عنصر واحد وهو الصفر .

٤ – المجموعة الفرعية :

إذا كان لدينا فصلا دراسيا به مجموعة من الدارسين من الذكور والاناث تماما يمكننا أن نقول مجموعة الدارسين كما يمكن أن نتحدث عن مجموعة الدارسين

من الذكور وفى هذه الحالة الاخيرة نجد أن كل دارس ذكر هو عنصر من عناصر مجموعة الدارسين من الذكور وهو أيضا عنصر من مجموعة الدارسين (التى تشمل الذكور والاناث) فإذا أطلقنا على مجموعة الدارسين المجموعة ا وعلى مجموعة الدارسين من الذكور المجموعة ب وعلى مجموعة الدارسين من الاناث المجموعة حـ فإنه يمكن القول بأن المجموعة ب هى مجموعة فرعيه من المجموعة ا والمجموعة حـ هى مجموعة فرعيه من المجموعه ا .

لأن كل عنصر من عناصر المجموعة ب هو فى نفس الوقت عنصر من عناصر المجموعة ا وكذلك كل عنصر من عناصر المجموعة حـ هو فى نفس الوقت عنصر من عناصر المجموعة ا

وعلى ذلك يمكن أن نعرف المجموعة الفرعية على الوجه الآتى :

مجموعة ب تعتبر مجموعة فرعية للمجموعة ا اذا كانت جميع عناصر المجموعة ب هى فى نفس الوقت من عناصر المجموعة ا أو بعبارة أخرى اذا كانت المجموعة ا تحتوى على جميع العناصر الخاصة بالمجموعة ب

فمثلا ا = [ل م ن هـ و]

ب = [م هـ و]

فى هذه الحالة تعتبر المجموعة ب مجموعة فرعية للمجموعة ا ولكى نعبر عن المجموعة ب بأنها مجموعة فرعيه من المجموعه ا نقول ب $\subseteq$ ا

ومعنى هذا أن الرمز $\subseteq$ = مجموعه فرعيه من

ولكى تكون ب مجموعه فرعيه حقيقية للمجموعه ا فانه من المفروض أن تحتوى المجموعه ا على عناصر أخرى خلافا لعناصر المجموعه ب حتى ولو كان عنصرا واحداً وفى هذه الحالة نستخدم الرمز $\subset$

٥ ـ تعادل المجموعات :

تساوى المجموعة ا المجموعة ب إذا كان لكل من المجموعتين نفس العناصر عددا ونوعا.

وفى هذه الحالة نقول ا = ب

وفى حالة عدم التساوى نقول ا ≠ ب

أى ا لا تساوى ب

ومعنى التساوى هو أن كل عنصر من عناصر ا يساوى تماما عنصرا من عناصر ب ولا يهمنا الترتيب فى هذه الحالة

فمثلا المجموعة ا = [٣ ٥ ٧ ٩]
، ب = [٧ ٥ ٣ ٩]
فى هذه الحالة ا = ب

والتساوى يختلف عن التعادل فى عدد العناصر فإذا كان لدينا المجموعة ا والمجموعة ب

وكان ا = [س ، ص ، ع ، ل]
، ب = [ص ، ع ، س ، ل]

فإن ا = ب لأن كلاهما تحتوى على نفس العناصر نوعا وكما ومعنى هذا أن ا ، ب هما أسمان لنفس المجموعة ولا يهم الترتيب فى هذه الحالة لأن

[س ، ص ، ع] = [ص ، س ، ع] = [ع ، س ، ص]

وكذلك إذا كانت

م = [س ، ص ، ل]
ن = [ع ، و ، هـ]

فإن م ≠ ن أى م لا تساوى ن

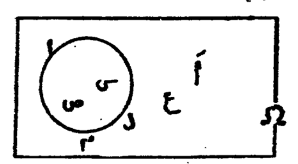
٦ ــ المجموعة المتممة Complement

إذا فرضنا أن لدينا المجموعة ا ⊂ Ω بالشكل

فإن المجموعة المكملة للمجموعة ا ويرمز لها بالرمز اَ هي المجموعة التي تحتوى على جميع العناصر التي لا توجد بالمجموعة ا ولكنها توجد بالمجموعة Ω

من الرسم يتضح أن .

اَ = [ع ل م]



ويمكن تلخيص بعض الخصائص السابقة فى شكل فين Venn Diagrams

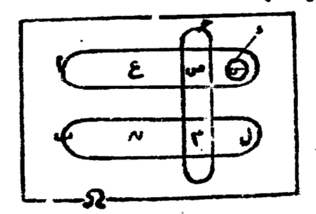
Ω = [س ، ص ، ع ، ل ، م ، ن]

ا = [س ، ص ، ع]

ب = [ل ، م ، ن]

حـ = [ص ، م]

ى = [س]



الشكل السابق يوضح المجموعة الأساسية Ω والمجموعات الفرعية لها ونلاحظ أن العنصر ص مشترك بين المجموعتين الفرعيتين ا ، حـ وكذلك

العنصر م مشترك بين المجموعتين الفرعيتين ب ، حـ وكذلك العنصر س مشترك بين المجموعتين الفرعيتين ا ، ى

نقول ص ∈ ا وكذلك ص ∈ حـ

وكذلك نلاحظ أن ى ⊂ ا أى أن المجموعة ى مجموعة فرعية حقيقية للمجموعة ا

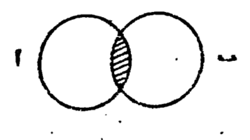
وكذلك اَ = [ل ، م ، ن] أى المجموعة المتممة للمجموعة ا بالنسبة للمجموعة Ω

والمجموعة الأساسية Ω والتى تحتوى على كل المجموعات كما هو موضح بالشكل السابق تسمى المجموعة الأساسية أو المجموعة الشاملة Universal Set or Background Set

تقـــاطع المجموعات

The Intersection of Sets

نفرض أن المجموعة ا تمثل طلبة السنة الأولى بكلية التجارة وأن المجموعة ب تمثل أعضاء جمعية المحاسبة وإذا فرضنا أن هناك عددا من طلبة السنة الأولى فى كلية التجارة هم فى نفس الوقت أعضاء فى جمعية المحاسبة فإنه من الممكن أن نمثل ذلك كما يلى :



الجزء المظلل = ا ∩ ب

- وعلى ذلك فإن المجموعة حـ = [طلبة السنة الأولى الأعضاء في جمعية الخاصة]

وعلى ذلك فإن تقاطع المجموعتين ا ، ب ويعبر عنه بالرمز ا ∩ ب هي المجموعة التي تشمل كل العناصر التي تعتبر عناصر المجموعتين في نفس الوقت، أي التي تشمل العناصر المشتركة .

مثال :

ا = [١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥]

ب = [٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨]

حـ = [٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٤]

في هذه الحالة نجد أن :

ا ∩ ب = [٢ ، ٤]

ا ∩ حـ = φ [ ]

ب ∩ حـ = [٨]

ا ∩ ا = [١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥]

اتحاد مجموعتين Union

المجموعة التي تعبر عن اتحاد مجموعتين هي المجموعة التي تشمل جميع العناصر الموجودة في كل من المجموعتين بدون تكرار فمثلا لو كان لدينا

المجموعة ا = [١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥]

المجموعة ب = [٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨]

فإن المجموعة حـ = [١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٨]

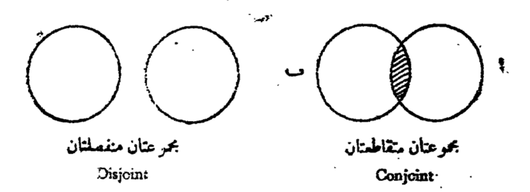
هي المجموعة المتحدة ونعبر ذلك بقولنا

أن حـ = ا ∪ ب

ويلاحظ أن المجموعة حـ بها كل العناصر التي تنتمي إلى المجموعة ا أو المجموعة

ب كما أنه من الممكن أن يكون أحد العناصر موجودا بالمجموعتين ا ، ب كما هو الحال بالنسبة للرقين ٢ ، ٤ ولكننا لم نكررهما .

كما يجب أن نلاحظ أنه من الممكن أن تتقاطع المجموعتان أو لا تتقاطع (عندما لا توجد أى عناصر مشتركة بينهما) .



قانون التبديل

Commutative Law

قانون المشاركة أو الاقتران Associative Law

• عندما نقول ا ∪ ب فلا يوجد أى فارق بين أن نقول ب ∪ ا أو ا ∪ ب
لأن النتيجة واحده وهى المجموعة التى تتضمن إتحاد ا ، ب أو ب ، ا

وعندما يمكن إجراء هذا التبديل دون أن تتأثر النتيجة فإنه من الممكن القول
بأن الأمر هنا إنما يخضع لقانون التبديل Commutative Law

وكذلك الحال بالنسبة للتقاطع فمن الممكن القول أن ا ∩ ب = ب ∩ ا
وفى هذه الحالة يخضع التقاطع أيضا لقانون التبديل

والأمر لا يختلف عند وجود ٣ مجموعات

ا ، ب ، حـ

فمثلا ا ∪ ب ∪ حـ = ا ∪ (ب ∪ حـ)
= ب ∪ (حـ ∪ ا) ولهذا لا داعى للأقواس

مثال

ا = (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤)
ب = (٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥)
حـ = (٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦)

ومثال ذلك :

ا ∪ (ب ∪ حـ) = ا ∪ (٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦)
= (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦)

وكذلك

ب ∪ (ح ∪ ا) = ب ∪ (١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦)

= (١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦)

أى أن ا ∪ (ب ∪ ح) = ب ∪ (ح ∪ ا) ولهذا يمكن القول بأنه نظراً لأن

ا ∪ (ب ∪ ح) = ب ∪ (ا ∪ ح)

فإن الأمر يخضع لقانون الاقتران Associative Law

كما يمكن إثبات أن

ا ∩ (ب ∩ ح) = (ا ∩ ب) ∩ ح

لأن الطرف الأيمن

(١، ٢، ٣، ٤) ∩ (٣، ٤، ٥) = (٣، ٤)

والطرف الأيسر

(٢، ٣، ٤) ∩ (٣، ٤، ٥، ٦) = (٣، ٤)

الخلاصة :

١ - ا ∪ ب = ب ∪ ا
٢ - ا ∩ ب = ب ∩ ا
} قانون التبديل

وكذلك

٣ - ا ∪ (ب ∪ ح) = (ا ∪ ب) ∪ ح
٤ - ا ∩ (ب ∩ ح) = (ا ∩ ب) ∩ ح
} قانون الاقتران

———

ع (ا) = عدد العناصر بالمجموعة ا

مثال

ا = (٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١)

ب = (ا ، س ، ص)

∴ ع (ا) = ٤

ع (ب) = ٣

الجمل الرياضية

Mathematical Sentences

إذا كان الشخص س هو مصرى الجنسية فيمكن أن نقول

ا = [س/س مصرى]

أى أن ا تتكون من العناصر س حيث س هو شخص مصرى
وتسمى هذه الجملة بالجملة المفتوحة ـ والجملة المفتوحة هى جملة رياضية توضح لنا تعريفا لمجموعة وتحدد لنا العناصر الموجودة فى الكون والتى تدخل ضمن هذه المجموعة

مجموعة الحلول لجملة مفتوحة :

هى قائمة بالعناصر التى تحدد الجملة المفتوحة أى التى ينطبق عليها التعريف الوارد فى الجملة المفتوحة

المتغيرات : س فى المثال السابق تسمى متغير لانها يمكن أن تأخذ العديد من أسماء المصريين أى أن كل مصرى يمكن أن يدخل دون قيد أو شرط ولكن فى بعض الاحيان قد نرغب فى تحديد الأشياء التى تدخل فى عداد المتغيرات وذلك بوضع قيد معين يحدد لنا مجال أو نطاق المتغير

مثال عددى

نفرض أن س هو متغير نطاقه المجموعة الأساسية

Ω = [−٤ ، −٣ ، −٢ ، −١ ، صفر ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤]

والمطلوب تحديد عناصر المجموعة [س/س عدد موجب]

الحل س = [١ ، ٢ ، ٣ ، ٤]

الفصل الثانى

مبادىء الاحتمالات

مقـــدمة وتعريف

١ ـــ تعتبر نظرية الاحتمالات من الفروع الهامة للرياضيات وقد اتسع نطاق تطبيقها حتى أصبح يشمل كافة العلوم الطبيعية والفنية والاجتماعية كما أن صناعة التأمين تقوم أساساً على نظرية الاحتمالات .

وقد كانت ألعاب الميسر المختلفة دافعاً أساسياً لظهور هذه النظرية بل إن هذه النظرية بدأت ببعض الدراسات التى قام بها الهواة والمحترفون على ألعاب الحظ منذ ثلاثة قرون .

ويهمنا فى هذا المقام إيضاح بعض المبادىء الأساسية للاحتمالات وتمشياً مع التطور التاريخى لهذه النظرية سنبدأ بعرض بعض الأمثلة التى ترتبط بما يسمى « ألعاب الحظ » .

ففى لعبة الروليت « Roulette » مثلا يوجد ٣٧ رقماً وفى كل دور من أدوار اللعب يدور القرص ومعه كرة صغيرة بسرعة ثم تقل سرعته تدريجيا إلى أن تستقر الكرة الموجودة على القرص عند أحد هذه الأرقام (من رقم الصفر إلى رقم ٣٦) وبفرض عـــدم وجود أى نوع من أنواع التحكم فى دوران القرص نجد أنه من الممكن أن تستقر الكرة عند أى رقم من الأرقام فى كل دور من الأدوار أو بعبارة أخرى تتكافأ جميع الأرقام فى فرص استقرار الكرة أمامها .

معنى هذا أنه عند إجراء تجربة معينة أو عملية معينة فإن هناك عدة نتائج يمكن أن تسفر عنها هذه التجربة أو العملية .

ففى المثال المشار إليه يمكن أن تسفر التجربة عن الحصول على أحد الأرقام من رقم الصفر حتى رقم ١٦ .

٢ - مجموعة أو فئة النتائج The Outcome Set لأى تجربة هى الفئة التى تتكون عناصرها من النتائج المختلفة التى يمكن أن تسفر عنها التجربة أى أن كل عنصر من عناصرها عبارة عن إحدى النتائج التى قد نحصل عليها .

وعلى ذلك نجد أن مجموعة النتائج فى المثال السابق = [٠ ، ١ ، ٢ ، ... ، ١٦]

وكذلك فى حالة إلقاء قطعة من النقود فإنه من الممكن أن نحصل على صوره أو رقم فتكون مجموعة النتائج = [ص ، ر] .

وإذا ألقينا بقطعتين من النقود فإن مجموعة النتائج هى
[ص ص ، ر ر ، ص ر ، ر ص] .

أى يمكن أن نحصل على
صوره وصوره أو رقم ورقم أو صوره ورقم أو رقم وصوره

وإذا ألقينا بزهرة من زهرات النرد على سطح أملس فإنه من المتوقع الحصول على أحد الأرقام من رقم ١ إلى رقم ٦
وتكون مجموعة النتائج [١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ٦]
ويرمز لمجموعة النتائج بالرمز Ω .

٣ - المجموعة الفرعية لمجموعة النتائج (الحدث)
عند إلقاء زهرة النرد قد نسأل عن حدث معين ا وهو الحصول على رقم فردى وهنا الحدث يمكن تمثيله بالمجموعة الفرعية أو الجزئية
ا = [١ ، ٣ ، ٥]

وإذا سألنا عن حدث آخر وهو الحصول على عدد زوجى فإن ذلك يمكن تمثيله بالمجموعة الفرعية
ب = [٢ ، ٤ ، ٦]

وفي مثل هذه الأحوال يجب أن نلاحظ أن الحدث الأول يمكن أن يتحقق إذا أسفرت التجربة عن الحصول على رقم فردى أي إذا حصلنا على أحد عناصر المجموعة ا كما أن الحدث الثاني يتحقق إذا حصلنا على أحـــد عناصر المجموعة الفرعية ب

ولذلك يمكننا تعريف الحدث بأنه مجموعة فرعية من مجموعة النتائج Ω

٤ — تعريف الإحتمال

إذا فرضنا أن مجموعة النتائج لتجربة معينة تتكون من عدد من ال[illegible] مقدار .

بحيث أن

Ω [م١ ، م٢ ، م٣ ...... ، من]

وإذا عرفنا كل مجموعة فرعية من مجموعة النتائج تتكون من عنصر واحد (أي نتيجة واحدة من النتائج] بالحادث البسيط ، فإن هذا يعني أن هناك ن من الأحداث البسيطة أو ن من المجموعات الفرعية لمجموعة النتائج وأن كل مجموعة من هذه المجموعات الفرعية تشمل عنصرا واحداً .

وفي هذه الحالة يمكن تعريف الإحتمال بأنه الرقم الذي يمكن تخصيصه أو إعطائه لكل حادث بسيط والذي يطلق عليه إحتمال الحادث وبحيث يكون مجموع الإحتمالات لكل الحوادث البسيطة = واحد صحيح .

ويمكن أن نرمز لإحتمال الحادث البسيط بالرمز ح [مي]

وعلى ذلك فإن

ح [م١] + ح [م٢] + ... + ح [من] = ١

كما يجدر الإشارة إلى أن الحوادث البسيطة تتمتع كلها بفرص متكافئة .

وإذا أردنا مثلا الحصول على احتمال حدوث الحادث ا والذي نرمز له بالرمز

ح (أ) حيث أ عبارة عن مجموعة فرعية من مجموعة النتائج ، فإن هذا الاحتمال = مجموع احتمالات الحوادث البسيطة التى تتكون منها المجموعة الفرعية أ

مثال :

ح (أ)

حيث أ = [ص ر ، ر ص ، ر ر]

ح (أ) = ح (ص ر) + ح (ر ص) + ح (ر ر)

$$= \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٤}$$

وتفسير ذلك هو أنه عند إلقاء قطعتين من النقود فإن هناك ٤ حالات وهى :ـ

ان تحصل على صورة وصورة
أو رقم ورقم
أو رقم وصورة
أو صورة ورقم

وعلى ذلك تتكون مجموعة النتائج من أربعة عناصر أى يوجد أربعة حوادث بسيطة واحتمال كل حادث بسيط منها = $\frac{١}{٤}$ والحادث أ (الحصول على صورة ورقم أو رقم وصورة أو رقمين)

$$= \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٤}$$

واحتمال المجموعة الخالية ح [ ] = صفر

ويمكن تلخيص ماسبق فيما يلى : ــ

ــ يمكن تعريف الحادث أ بأنه فئة جزئية من فئة النتائج الشاملة Ω

ويمكن أن يتحقق الحادث إذا كانت نتيجة التجربة عنصراً من عناصر هذه الفئة الجزئية .

ـ إذا كانت مجموعة النتائج Ω تحتوى على عدد من الفئات الجزئية التى تتكون كل منها من عنصر واحد ـ أى أن كل فئة تحتوى على نتيجة واحدة من من النتائج التى يمكن أن تسفر عنها التجربة ـ فإن الفئة الجزئية التى تحتوى على نتيجة واحدة تسمى الحادث البسيط .

ـ يمكن تعريف الإحتمال بأنه رقم موجب يمكن تخصيصه لكل حادث بسيط في فئة النتائج ويسمى احتمال الحادث البسيط بحيث ان مجموع الإحتمالات لكل هذه الحوادث البسيطة = ١

ـ الإحتمال يمكن أن يكون رقماً أكبر من الصفر وأصغر من الواحد الصحيح

مثال (١) :

كيس به ١٠ كرات حمراء ، ٥ كرات بيضاء في هذه الحالة نعتبر المجموعة الشاملة Ω هي مجموعة الكرات كلها الموجودة بالكيس وعدد عناصرها = ١٥

أى أن ﻫ (Ω) = ١٥

ونعتبر أن مجموعة الكرات الحمراء ا مثلا هي مجموعة فرعية من المجموعة الأساسية وعدد عناصرها ﻫ (ا) = ١٠

في هذه الحالة نجد أن

$$ح(ا) = \frac{ﻫ(ا)}{ﻫ(\Omega)} = \frac{١٠}{١٥} = \frac{٢}{٣}$$

أى أن احتمال سحب كرة حمراء من هذا الكيس = $\frac{٢}{٣}$.

وعموما يمكن القول بأنه إذا كانت هناك فئة شاملة Ω ـ وكل عنصر

من عاصرها يعتبر حادثا بسيطا وأن هـــذه الأحداث البسيطة متشابهة ولها فرص متكافئة الحدوث . وكان لهذه الفئة الشاملة فئة فرعية ا مكونة من مجموعة من الأحداث البسيطة التي تجمعها صفة مشتركة فإن

$$ع(ا) = \frac{ﻫ(ا)}{ﻫ(\Omega)}$$

مثال (٢) :

تاجر لديه ٥٠ سيارة للبيع من بينها ١٠ سيارات بيضاء . فاذا سرقت سيارة واحدة فما احتمال أن تكون السيارة المسروقة بيضاء

في هذه الحالة المجموعة الأساسية Ω تشمل جميع السيارات

$$ﻫ(\Omega) = ٥٠$$

مجموعة السيارات البيضاء = (ا)

$$ﻫ(ا) = ١٠$$

$$\text{الإحتمال المطلوب} = \frac{ﻫ(ا)}{ﻫ(\Omega)} = \frac{١٠}{٥٠} = \frac{١}{٥}$$

مثال (٣) :

في لعبة الروليت . ما احتمال أن يفوز شخصا يلعب على الأرقام الفردية

الحـــل

مجموعة الأرقام الفردية (ا) مثلا

وعدد عناصرها ﻫ (ا) = ١٨

المجموعة الشاملة للارقام كلها = ﻫ (Ω) = ٣٧

$$\therefore \text{الاحتمال المطلوب} = \frac{١٨}{٣٧}$$

يتضح مما سبق أن كل هذه الإحتمالات يمكن قياسها بطريقة حسابية لهذا يطلق عليها الاحتمالات الحسابية أو الرياضية .

"Mathematical Probabilities"

وهى الإحتمالات التى يمكن قياسها دون حاجة لإجراء تجارب معينة .

ولكن لا يوجد ما يمنع من إجراء التجارب وذلك للمقارنة بين الاحتمال الرياضى وبين القيم الفعلية التى يمكن الحصول عليها وجدير بالذكر أنه ليس من المؤكد خصوصاً إذا صغر عدد التجارب أن يحدث التوافق بين الاحتمال النظرى والقيم الفعلية التى نحصل عليها ، ولكن عند إجراء عدد كبير جداً من التجارب فإن الاحتمال النظرى يميل إلى التعادل مع القيم المحققة كما أنه من الممكن إيجاد علاقة بين الاحتمالات الرياضية وبين النتائج الإحصائية التى نحصل عليها نتيجة التجارب العملية ، وهذه العلاقة يحكمها قانون الأعداد الكبيرة .

ولقد حاول الكثير من الكتاب فى هذا الموضوع انتقاد الاحتمالات الحسابية ومنهم ستيوارت ميل وفين وكريستال وليس المجال هنا الدخول فى تفاصيل هذا الموضوع ولكن تكفى الإشارة إلى أنه لتحقيق الاحتمال الرياضى لابد من إجراء عدد كبير جداً من التجارب وأما لو قل عدد التجارب فإنه من الممكن أن يحدث خلاف كبير من الاحتمال الرياضى والقيم المحققة ، فمثلا لو ألقينا زهرة من زهرات النرد على سطح أملس ١٢ مرة فانه لا يمكن الحصول على كل رقم من الأرقام الستة مرتين ولو حدث هذا لكان بمحض الصدفة ولكننا لو أجريناهذه التجربة عدداً كبيراً جداً من المرات فانه من الممكن أن يتعادل عدد مرات الحصول على كل رقم من الأرقام الستة .

ولهذا يعرف البعض الاحتمال بأنه التكرار النسبى لحدوث حدث معين عندما تجرى التجربة عدداً كبيراً جداً من المرات .

كما يتعين علينا أن نفرق بين الاحتمالات الرياضية التى يمكن الحصول عليها بالطرق الحسابية السابق الإشارة إليها وبين الاحتمالات الإحصائية Statistical probabilities التى لا يمكن قياسها إلا نتيجة لإجراء التجارب على الظواهر المختلفة وتسجيل الإحصاءات المتعلقة بها من واقع الخبرات الفعلية للماضى القريب ، ثم افتراض حدوثها فى المستقبل القريب بنفس الصورة التى حدثت بها فى الماضى .

وللوصول إلى احتمالات على جانب من الدقة يتعين علينا إجراء عدد كبير من التجارب أو إجراء التجربة الواحدة عدداً كبيراً من المرات .

فمثلا احتمالات الوفاة أو احتمالات الحياة تعتبر من الاحتمالات الإحصائية لأننا لا نستطيع الحصول عليها إلا بعد إجراء وتسجيل الإحصاءات فيمكننا على سبيل المثال أن نلاحظ عدداً كبيراً من الأفراد كلهم عند تمام سن معين وليكن ٣٠ مثلا ثم نسجل عدد الوفيات بين تمام السن ٣٠ وتمام السن ٣١ .

مثال : عدد الأحياء عند تمام السن ٣٠ = ١٠٠٠٠٠ شخص .

» » » » ٣١ = ٩٩٣٠٠ »

عدد الوفيات بين تمام السن ٣٠ ، تمام السن ٣١ = ٧٠٠ شخص .

وعلى هذا ونتيجة لهذه التجربة يمكننا أن نقول :

احتمال أن شخصاً عمره ٣٠ سنة يموت فى خلال سنة واحدة .

$$= \frac{٧٠٠}{١٠٠٠٠٠} = ٠٠٧,$$

احتمال أن شخصاً عمره ٣٠ سنة يعيش إلى تمام السن ٣١

$$= \frac{٩٩٣٠٠}{١٠٠٠٠٠} = ٩٩٣,$$

وهذه الاحتمالات تعتبر احتمالات إحصائية لأنها جاءت نتيجة للخبرة

الإحصائية ومن الفروق الأساسية بين الاحتمالات الرياضية والاحتمالات الإحصائية أن احتمالات الأخيرة عرضة للتغير من وقت لآخر كما أنها قد تختلف من مكان لآخر فمثلا احتمالات الوفاة والحياة السابق الإشارة إليها تختلف من مجتمع لآخر كما أنها قد تتغير فى المجتمع الواحد من وقت لآخر وذلك على العكس من الاحتمالات الرياضية فهى لا تتغير إطلاقاً .

فمثلا إذا ألقينا بعملة متماثلة لها وجه به صورة ووجه به رقم . فاحتمال ظهور الصورة = ½ واحتمال ظهور الرقم = ½ وسواء كنا فى بلد أو آخر فان الاحتمال الرياضى لا يتغير . كذلك فى أى وقت من الأوقات فى البلد الواحد فيظل الاحتمال الرياضى هنا = ½

كما يجب أن نشير إلى أن الاحتمالات الرياضية يمكن إيجادها بالطرق الحسابية السابق الإشارة إليها بالنسبة لعدد محدود من الحوادث ولكن لا يمكن إيجادها بالنسبة لباقى الظواهر . وعموماً تستخدم الاحتمالات الإحصائية لقياس احتمالات الظواهر المختلفة على ضوء القيام بعدد كبير من التجارب وتسجيل نتائجها

فمثلا لو ألقينا بقطعة من النقود ١٠٠٠٠ مرة وحصلنا على الصورة ٥٨٠٠ مرة لكان التكرار النسبى للصورة = ٠,٥٨ ولو أننا ألقينا بالقطعة ١٠٠٠٠ مرة أخرى وحصلنا على الصورة ٤٣٠٠ مرة لكان التكرار النسبى لـ ٢٠٠٠٠ تجربة

$$= \frac{٥٨٠٠ + ٤٣٠٠}{٢٠٠٠٠} = \frac{١٠١٠٠}{٢٠٠٠٠} = ٠,٥٠٥ \text{ تقريباً}$$

وبزيادة عدد التجارب شيئاً فشيئاً نصل إلى الرقم الذى يمكن تسميته احتمال ظهور الصورة وهذا الرقم يصل إلى ٠,٥

الفصل الثانى

أمثلة على الاحتمالات البسيطة

عدد عناصر المجموعة الشاملة = ن (Ω) .

عدد عناصر المجموعة الفرعية ا أى التى تشمل العناصر المطلوبة = ن (ا)

فى هذه الحالة عدد عناصر المجموعة المتممة للمجموعة ا (وهى المجموعة التى تحتوى على باقى العناصر التى لا توجد بالمجموعة ا ولكنها توجد بالمجموعة الشاملة = ن ($\bar{ا}$)

فى هذه الحالة نجد أن

$$ح (ا) = \frac{ن (ا)}{ن (Ω)} \quad \text{احتمال النجاح}$$

$$ح (\bar{ا}) = \frac{ن (\bar{ا})}{ن (Ω)} \quad . \quad \text{الفشل}$$

$$\text{وكذلك } ح (ا) + ح (\bar{ا}) = \frac{ن (ا)}{ن (Ω)} + \frac{ن (\bar{ا})}{ن (Ω)}$$

$$= \frac{ن (ا) + ن (\bar{ا})}{ن (Ω)}$$

$$= \frac{ن (Ω)}{ن (Ω)} = ١ .$$

$$\text{وذلك لأن } ن (Ω) = ن (ا) + ن (\bar{ا})$$

مثال (١) :

مجموعة كاملة من ورق اللعب (٥٢ ورقة) سحبت منها ورقة واحدة . أوجد احتمال أن تكون الورقة المسحوبة تحمل رقم ٥

الحـــل :

عدد الأوراق كلها ويساوى عدد الحالات كلها = ٥٢

« « التى تحمل الرقم ٥ = ٤ ورقات

∴ الاحتمال المطلوب $= \frac{٤}{٥٢}$

$= \frac{١}{١٣}$

مثال (٢):

فى المثال السابق لو فرضنا أننا سحبنا ورقتين مرة واحدة أوجد احتمال أن تكون كل منها ٥ .

الحـــل :

عدد الطرق التى يمكن بواسطتها سحب ورقتين من ٥٢ ورقة .

$= {}^{٥٢}ق_{٢}$

وحيث أن لدينا ٤ ورقات تحمل كل منها الرقم ٥

∴ عدد طرق اختيار ٢ من ٤ $= {}^{٤}ق_{٢}$

الاحتمال المطلوب $= \frac{{}^{٤}ق_{٢}}{{}^{٥٢}ق_{٢}}$

$= \frac{٤ \times ٣}{٢ \times ١} \div \frac{٥٢ \times ٥١}{٢ \times ١}$

$= \frac{١}{٢٢١}$

مثال (٣) :

صندوق يحتوى على أ من الكرات البيضاء ، ب من الكرات الحمراء سحب شخص م من الكرات بطريقة عشوائية .

أوجد احتمال أن يكون منها س من الكرات البيضاء ، ص من الكرات الحمراء وذلك بفرض أن :

س + ص = م

، س ≦ أ

، ص ≦ ب

الحـــل :

باستخدام التوافيق فإن عدد الطرق التى يمكن بواسطتها اختيار م من الكرات من (أ + ب) من الكرات .

$$^{أ+ب}ق_{م} = {}^{أ+ب}ق_{س+ص}$$

عدد طرق اختيار س من الكرات البيضاء من أ من الكرات البيضاء

$$= {}^{أ}ق_{س}$$

وعدد طرق اختيار ص من الكرات الحمراء من ب من الكرات الحمراء

$$= {}^{ب}ق_{ص}$$

$$\text{الاحتمال المطلوب} = {}^{أ}ق_{س} \times {}^{ب}ق_{ص} \div {}^{أ+ب}ق_{س+ص}$$

مثال (٤) :

مجموعة كاملة من أوراق اللعب عـــدد أوراقها ٥٢ ورقة ثم توزيعها بالتساوى بطريقة عشوائية على أربعة أشخاص أ ، ب ، حـ ، ء ، أوجد الاحتمالات الآتية :

١ ـ ألا يكون لدى ا	أى ورقة تحمل رقم	١٠
٢ ـ أن يكون لدى ا	ورقه واحدة تحمل رقم	١٠
٣ ـ « « ا	ورقتان تحملان رقم	١٠
٤ ـ « ا	٣ ورقات تحمل رقم	١٠
٥ ـ « « ا	أربعة ورقات تحمل رقم	١٠

الحـــل :

عدد الاوراق = ٥٢ منها ٤ أوراق تحمل الرقم ١٠ ،
و ٤٨ ورقة لا تحمل هذا الرقم

وبتطبيق نفس الطريقة المتبعة فى مثال (٣) نجد أن الاحتمالات هى كالآتى :

١ ـ ألا يكون لدى ا أى ورقة تحمل رقم ١٠

$$ {}^{٤}\text{ن}_{٠} \times {}^{٤٨}\text{ن}_{١٣} \div {}^{٥٢}\text{ن}_{١٣} $$

$$ = \frac{٨٢٢٥١}{٢٧٠٧٢٥} $$

٢ ـ أن يكون لدى ا ورقة واحدة تحمل الرقم ١٠

$$ = {}^{٤}\text{ن}_{١} \times {}^{٤٨}\text{ن}_{١٢} \div {}^{٥٢}\text{ن}_{١٣} $$

$$ = \frac{١١٨٨٠٧}{٢٧٠٧٥٢} $$

ملاحظات على الحل :

عدد طرق اختيار ورقة واحدة تحمل رقم ١٠ من ٤ ورقات = ${}^{٤}\text{ن}_{١}$

وعدد طرق اختيار ١٢ ورقة وليس بها ورقة رقم ١٠

من ٤٨ ورقة = ${}^{٤٨}\text{ن}_{١٢}$

والعمليتان تحدثان معاً بعدد من الطرق مقداره ${}^{4}\text{ن}_{1} \times {}^{48}\text{ن}_{12}$

عدد الطرق كلها التي يمكن بواسطتها اختيار ١٣ ورقة من ٥٢

$= {}^{52}\text{ن}_{13}$ وهو مقام الاحتمال في جميع الأحوال .

٣ ــ احتمال أن يكون لدى ا ورقتان تحملان رقم ١٠

$$= {}^{4}\text{ن}_{2} \times {}^{48}\text{ن}_{11} \div {}^{52}\text{ن}_{13}$$

$$= \frac{٥٧٧٩٨}{٢٧٠٧٢٥}$$

٤ ــ احتمال أن يكون لدى ا ٣ ورقات تحمل رقم ١٠

$$= {}^{4}\text{ن}_{3} \times {}^{48}\text{ن}_{10} \div {}^{52}\text{ن}_{13}$$

$$= \frac{١٦١٥٤}{٢٧٠٧٢٥}$$

٥ ــ احتمال أن يكون لدى ا ٤ ورقات تحمل رقم ١٠

$$= {}^{4}\text{ن}_{4} \times {}^{48}\text{ن}_{9} \div {}^{52}\text{ن}_{13}$$

$$= \frac{٧١٥}{٢٧٠٧٢٥}$$

مثال (٥) :

ألقيت ثلاث زهرات على سطح أملس أوجد احتمال :

١ ــ الحصول على مجموع ٣

٢ ــ » » » ٤

٣ ــ » » » ٥

٤ ــ » » » ٦

٥ ــ الحصول على مجموع ٧

٦ — » » » ٨

٧ — » » » ٩

٨ — » » » ١٠

٩ — » » » ١١

١٠ — » » » ١٢

١١ — » » » ١٣

١٢ — » » » ١٤

١٣ — » » » ١٥

١٤ — » » » ١٦

١٥ — » » » ١٧

١٦ — » » » ١٨

ثم أثبت أن مجموع هذه الاحتمالات = ١

الحـــل :

١ ــ احتمال الحصول على مجموع ٣

كل زهرة لها ٦ أوجه تحمل الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦

∴ الثلاث زهرات يمكن أن تظهر معاً بعدد من الطرق مقداره

٦ × ٦ × ٦ = ٢١٦ طريقة .

∴ مجموع ثلاثة يمكن الحصول عليه من الزهرات الثلاث فى حالة واحـــدة وهى أن تظهر الزهرة الأولى بالرقم ١ والثانية بالرقم ١ والثالثة بالرقم ١.

∴ الاحتمال المطلوب = $\frac{١}{٢١٦}$

———

٢ ــ احتمال الحصول على مجموع ٤

مجموع ٤ يمكن الحصول عليه من حاصل جمع ٢+١+١

عدد طرق ترتيب هذه الأرقام الثلاثة .

$$= \frac{\underline{|٣}}{\underline{|٢}}$$ (لوجود رقمين متشابهين)

$$= \frac{٣ \times ٢}{٢ \times ١} = ٣$$

∴ يمكن الحصول على مجموع ٤ بثلاث طرق

$$\text{الاحتمال المطلوب} = \frac{٣}{٢١٦}$$

٣ ــ احتمال الحصول على مجموع ٥

مجموع ٥ يمكن الحصول عليه من حاصل جمع الثلاثة أرقام ٣ ، ١ ، ١ .
وهذه الأرقام يمكن ترتيبها بعدد من الطرق

$$= \frac{\underline{|٣}}{\underline{|٢}} = ٣$$

كما يمكن الحصول عليه من حاصل جمع ٢ ، ٢ ، ١ وهذه الأرقام يمكن ترتيبها بعدد من الطرق .

$$= \frac{\underline{|٣}}{\underline{|٢}} = ٣$$

عدد طرق الحصول على مجموع ٥ = ٦ طرق .

$$\therefore \text{الاحتمال} = \frac{٦}{٢١٦}$$

٤ ــ احتمال الحصول على مجموع ٦

مجموع ٦ يمكن الحصول عليه من حاصل جمع

٤ ، ١ ، ١ وتحدث بثلاث طرق مختلفة

٣ ، ٢ ، ١ وتحدث بعدد من الطرق = |٣ = ٣ × ٢ = ٦ طرق

٢ ، ٢ ، ٢ وتحدث بطريقة واحدة .

∴ عدد الطرق الممكنة = ١٠

$$\therefore \text{الاحتمال} = \frac{10}{216}$$

٥ ــ احتمال الحصول على مجموع ٧

مجموع ٧ يمكن الحصول عليه من ثلاث زهرات من حاصل جمع

٥ ، ١ ، ١	يحدث بـ ٣ طرق
٤ ، ٢ ، ١	« « ٦ «
٣ ، ٢ ، ٢	« « ٣ «
٣ ، ٣ ، ١	« « ٣ «
عدد الطرق الممكنة	١٥ طريقة

$$\therefore \text{الاحتمال المطلوب} \frac{15}{216}$$

٦ ــ احتمال الحصول على مجموع ٨

[illegible]

[illegible] ، ١ تحدث [illegible] ٣ [illegible]

[illegible] ، ٢ ، ١ « « ٦ «

٤ ، ٣ ، ١ تحدث بـ ٦ طرق

٤ ، ٢ ، ٢ « « ٣ «

٣ ، ٣ ، ٢ « « ٣ «

٢١ طريقة

والاحتمال = $\frac{٢١}{٢١٦}$

٧ ــ احتمال الحصول على مجموع ٩

مجموع ٩ يمكن الحصول عليه من حاصل جمع

٦ ، ٢ ، ١ تحدث بـ ٦ طرق

٥ ، ٢ ، ٢ « « ٣ «

٥ ، ٣ ، ١ « « ٦ «

٤ ، ٤ ، ١ « « ٣ «

٤ ، ٣ ، ٢ « « ٦ «

٣ ، ٣ ، ٣ « بطريقة واحدة

٢٥ طريقة

∴ الاحتمال = $\frac{٢٥}{٢١٦}$

٨ ــ احتمال الحصول على مجموع ١٠

مجموع ١٠ يمكن الحصول عليه من حاصل جمع

٦ ، ٣ ، ١ تحدث بـ ٦ طرق

٦ ، ٢ ، ٢ « « ٣ «

٥ ، ٤ ، ١ « « ٦ «

٥ ، ٣ ، ٢ « « ٦ «

٤ ، ٣ ، ٣ « « ٣ «

٤ ، ٤ ، ٢ « « ٣ «

٢٧ طريقة

الاحتمال المطلوب = $\frac{٢٧}{٢١٦}$

وبالمثل يمكن إثبات أن احتمالات الحصول على المجاميع ١١ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٦ ، ١٧ ، ١٨

= $\frac{٢٧}{٢١٦}$ ، $\frac{٢٥}{٢١٦}$ ، $\frac{٢١}{٢١٦}$ ، $\frac{١٥}{٢١٦}$ ، $\frac{١٠}{٢١٦}$ ، $\frac{٦}{٢١٦}$ ، $\frac{٣}{٢١٦}$ ، $\frac{١}{٢١٦}$ على الترتيب

وبجمع كل الاحتمالات السابقة نحصل على واحد صحيح .

وهذا بديهي لأنه من المؤكد عند إلقاء ثلاث زهرات الحصول على أحد المجاميع السابقة .

الفصل الثالث

الاحتمالات المركبة

أولا : أنواع الحوادث

تقسم الحوادث إلى ثلاثة أنواع رئيسية :

---

١ — الحوادث الطاردة أو المانعة أو المتنافرة Mutually exclusive

يقال للحوادث بأنها مانعة أو طاردة إذا كان حدوث أحد الحوادث يمنع حدوث الأخرى .

فمثلا عند إلقاء زهرة نرد مرة واحدة فإن الحصول على رقم معين وليكن رقم ٥ يمنع الحصول على أي من الأرقام الأخرى فيعتبر الحدث وهو الحصول على رقم ٥ حدث مانع بالنسبة للأحداث الأخرى وهي الحصول على رقم
١ و ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٦

وفي المثال السابق نجد أن المجموعة الشاملة عند إلقاء زهرة النرد تتكون من ٦ عناصر وإذا فرضنا أن الحدث ا هو الحصول على رقم ٥ والحدث ب هو الحصول على رقم ٦ عند إلقاء الزهرة ، فإن تحقق أحد الحادثين يمنع تحقق الآخر ونقول .

الحدثان ا ، ب حدثان متنافران ومعنى هذا أنه لا يوجد عناصر مشتركة للحدثين .

وعلى ذلك فالحدث ا ب (أي حدوث الحادثين معا) هو حدث مستحيل واحتماله يساوي صفر

أ ب = حدوث كل من أ ، ب

ح (أ ب) = احتمال حدوث الحدثين أ ، ب معاً = صفر

ح (أ ∪ ب) = احتمال حدوث أ أو ب أو هما معا

لأى حدثين متنافرين أ ، ب فإن إحتمال حدوث أحدهما أو كلاهما .

ح (أ ∪ ب) = ح (أ) + ح (ب)

وبعبارة أخرى :

إذا كان كل من أ ، ب مجموعة فرعية من المجموعة الشاملة Ω ولا توجد عناصر مشتركة بينهما فإن احتمال حدوث أحد الحادثين أو كلاهما

= ح (أ) + ح (ب)

والمجموعتان أ ، ب فى هذه الحالة منفصلتان "disjoint"

مثال (١) :

ألقيت زهرتين من زهرات النرد
ما احتمال الحصول على مجموع ٩ أو مجموع ٧

الحـــل

الحادثان متنافران

عدد عناصر المجموعة الاساسيه
= ٦ × ٦ = ٣٦

نفرض أن الحدث أ هو الحصول على مجموع ٩ عدد عناصر المجموعة الفرعية أ = ٤

ح (أ) = $\frac{٤}{٣٦}$ = $\frac{١}{٩}$

عدد عناصر المجموعة الفرعية ب = ٦

$$ع(ب) = \frac{٦}{٣٦} = \frac{١}{٦}$$

$$ع(أ \sqcup ب) = ع(أ) + ع(ب)$$

$$= \frac{١}{٩} + \frac{١}{٦} = \frac{١٥}{٥٤}$$

كما هو موضح من التحليل :

وجه الزهرة الثانية

وجه الزهرة الأولى	١	٢	٣	٤	٥	٦
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١
٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢

مجموع وجهى الزهرتين

والقاعدة السابقة قاعدة عامة مهما تعددت الحوادث

٢ ـ الحوادث المشتركة جزئيا

وهذه الحوادث توجد بينها عناصر مشتركة أى ليست طاردة لبعضها البعض فإذا كان لدينا الفئة الأساسية ش وكان لدينا الفئة الفرعية أ والفئة الفرعية ب [illegible]

[illegible] فإنها المجموعة الفرعية التى تشمل كل العناصر التى تعتبر عناصر للمجموعة [illegible] المجموعة [illegible] فى نفس الوقت

وفي هذه الحالة نجد أن :

إحتمال حدوث الحادثين معا أي حدوث ا ، ب معا يرمز له بالرمز

$$ع(ا \cap ب) = \frac{ن(ا \cap ب)}{ن(\Omega)}$$

مثال (٢)

مجموعة كاملة من أوراق اللعب (٥٢ ورقة) سحبنا منها ورقة واحدة ما إحتمال أن تكون الورقة المسحوبة بنتا وتحمل اللون الأحمر .

الحل :

$ن(\Omega) = ٥٢$.

ن (ا) عدد الأوراق الحمراء = ٢٦

ن (ب) عدد البنات = ٤

ن (ا $\cap$ ب) = عدد الأوراق التي تحمل اللون الأحمر وبنت في نفس الوقت = ٢

$$ع(ا \cap ب) = \frac{٢}{٥٢} = \frac{١}{٢٦}$$

إحتمال حدوث أحد الحدثين أو كلاهما :

$$ع(ا \cup ب) = ع(ا) + ع(ب) - ع(ا \cap ب)$$

$$= \frac{ن(ا)}{ن(\Omega)} + \frac{ن(ب)}{ن(\Omega)} - \frac{ن(ا \cap ب)}{ن(\Omega)}$$

$$= \frac{ن(ا) + ن(ب) - ن(ا \cap ب)}{ن(\Omega)}$$

ويلاحظ أننا طرحنا ن (ا ∩ ب) لأنه لو أضفنا عناصر ا على عناصر ب دون طرح فإن هذا يعني أننا أخذنا العناصر المشتركة بين ا ، ب في الاعتبار مرتين .

مثال - (٣) :

في المثال السابق رقم ٢ ما احتمال أن تكون الورقة المسحوبة بنتا أو أن تكون حمراء .

الحل

$$\text{الاحتمال المطلوب} = \frac{ن(ا) + ن(ب) - ن(ا \cap ب)}{ن(\Omega)}$$

$$= \frac{٢٦ + ٤ - ٢}{٥٢}$$

$$= \frac{٢٨}{٥٢} = \frac{٧}{١٣}$$

ويلاحظ أن العناصر المشتركة عددها ٢ لأن هناك بنتان لونهما أحمر وهاتان البنتان يعتبران من عناصر ا ، ب على حد سواء .

٢ — الحوادث المنفصلة Separate Events

الحوادث التي لا تتنافر مع بعضها البعض والتي لا تتداخل في بعضها البعض تسمى حوادث منفصلة — ويلاحظ أن الحوادث المنفصلة تنتمي إلى مجموعات نتائج منفصلة — فعلى سبيل المثال إذا أو ألقينا عملة إلى أعلى فإنه من الممكن أن نحصل على صورة أو رقم .

وفي هذه الحالة تتكون مجموعة النتائج من عنصرين أي

$$[ص_١ ، ص_٢]$$

واحتمال الحصول على صورة = ½

ولو أننا ألقينا بالعملة مرة ثانية إلى أعلى فإنه تكون لدينا مجموعة نتائج جديدة

أى [ص٢ ، ص١]

والحدث «الحصول على صورة فى المرة الأولى» منفصل تماما عن الحدث «الحصول على صورة فى الرمية الثانية» ، لأن كل منهما ينتمى إلى مجموعة نتائج منفصلة

وتنقسم هذه الحوادث إلى حوادث مستقلة وأخرى غير مستقلة .

وسنكتفى الآن بالقول بأن الحوادث المستقلة هى الحوادث التى لا يؤثر تحقق إحداها أو عدم تحققه فى الحوادث الأخرى

وأما الحوادث غير المستقلة فهى الحوادث التى ترتبط ببعضها البعض بحيث أن حدوث أحدها يؤثر فى الحوادث الأخرى

فلو كان لدينا كيس به بعض الكرات الحمراء وبعض الكرات الصفراء فإن عملية سحب كرة من الكيس بطريقة عشوائية (أ) مثلا لا يؤثر فى عملية سحب كرة من الكيس مرة ثانية (ب) مثلا إذا كانت الكرة التى تم سحبها فى المرة الأولى ستعاد إلى الكيس قبل إجراء السحب فى المرة الثانية

فيعتبر الحدثان أ ، ب مستقلان عن بعضهما وأما لو كانت الكرة التى سحبت من الكيس فى المرة الأولى لم ترد إلى الكيس قبل السحب الثانى لكان العملية أ تأثير على العملية ب ولكان الحدثان مرتبطين ببعضهما البعض

الاحتمال المشترك لحدوث حدثين أو أكثر من الحوادث المستقلة

أ ، ب عمليتان مستقلتان عن بعضهما البعض ، واحتمال حدوثهما = ح (أ) ، ح (ب) على الترتيب

احتمال حدوث الحدثين أ ، ب معا

ح (أ ، ب) = ح (أ) × ح (ب)

وبالمثل

ح (أ ، ب ، حـ ، .... ، ن)
= ح (أ) × ح (ب) × ح (حـ) ...... × ح (ن)

الإحتمال الشرطي :

في المثال السابق لاحظنا أن الأحداث مستقلة بعضها البعض لهذا فإن إحتمال حدوث الحدث ب بفرض أن الحدث أ تحقق يرمز له بالرمز
ح (ب/أ) وهو يساوي ح (ب)

لأنه لا يوجد أي تأثير للحدث أ على الحدث ب

وعلى ذلك ففي الأحداث المستقلة فإن الاحتمال الشرطي لحدث ب بفرض أن الحدث أ قد تحقق = احتمال حدوث الحادث ب

وأما لو كانت الأحداث غير مستقلة "Dependent"

فإن الاحتمال الشرطي للحدث ب وهو
ح (ب/أ) لا يساوي ح (ب)

وعلى ذلك فاحتمال حدوث عدة حوادث غير مستقلة أ ، ب ، حـ
= ح (أ) × ح (ب/أ) × ح (حـ/ب/أ) وهكذا

أي يساوي احتمال حدوث الحادث الأول × احتمال حدوث الحادث الثاني بفرض أن الحادث الأول قد تحقق × احتمال حدوث الثالث بفرض أن الحادثين الأول والثاني قد تحققا .

وعموما نجد أن القاعدة التي تطبق في حالة الحوادث المستقلة وغير المستقلة هي قاعدة الضرب مع فارق واحد وهو أنه بالنسبة للحوادث غير المستقلة يجب أن نلاحظ أننا عندما نضرب الاحتمال الأول في الثاني يحسب الاحتمال الثاني بفرض أن الأول قد تحقق .

والأمثلة الآتية توضح لنا الفارق بين الأحداث المستقلة وغير المستقلة .

مثال ٤ :

ألقيت بقطعة من النقود المتماثلة مرتين إلى أعلى . أوجد احتمال الحصول على صورة فى المرتين .

الحـــل :

احتمال الحصول على صورة فى المرة الأولى $= \frac{1}{2}$

« « « « « « الثانية $= \frac{1}{2}$

وحيث أن كل حدث من الحادثين مستقل تماماً عن الآخر ، ولا يوجد أى ارتباط بينهما . فإننا نطبق القاعدة

$$ح(ا ب) = ح(ا) \times ح(ب)$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

مثال ٥ :

كيس به ١٠ كرات حمراء ، ٤ كرات زرقاء . سحبنا كرة من الكيس ولم نردها ، ثم سحبنا كرة أخرى من الكيس ، أوجد احتمال أن تكون كل من الكرتين المسحوبتين زرقاء .

الحـــل :

احتمال سحب كرة زرقاء فى المرة الأولى $= \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$

احتمال سحب كرة زرقاء فى المرة الثانية $= \frac{3}{13}$

الاحتمال المطلوب $= \frac{2}{7} \times \frac{3}{13} = \frac{6}{91}$

ملاحظات على الحل : الاحتمالات هنا غير مستقلة .

$$\text{ع}(\text{أ ب}) = \text{ع}(\text{أ}) \times \text{ع}(\text{ب}/\text{أ})$$

$$= \frac{٢}{٧} \times \frac{٣}{١٣} = \frac{٦}{٩١}$$

لأن ع (ب / أ) تساوى احتمال سحب الكرة الزرقاء فى المرة الثانية بفرض أن الاحتمال فى الأولى قد تحقق ، أى كانت الكرة المسحوبة فى المرة الأولى زرقاء .

أمثلة عامة على الاحتمالات

المثال الأول :

إذا كان لدينا عملية معينة ورمزنا لاحتمال النجاح بالرمز ح واحتمال الفشل بالرمز ل .

فما هو احتمال نجاح هذه العملية خلال م من المرات الأولى المتتالية وفشلها فى باقى المرات وذلك بفرض أننا كررنا هذه العملية ن من المرات بنفس الطريقة وفى نفس الظروف .

الحـــل :

احتمال النجاح فى كل مرة $=$ ح

∴ احتمال النجاح م من المرات الأولى المتتالية $=$ $ح^{م}$

، احتمال الفشل باقى المرات وعددها (ن – م) $=$ $ل^{ن-م}$

∴ الاحتمال المطلوب $=$ $ح^{م} \times ل^{ن-م}$

المثال الثانى :

فى المثال الأول أوجد احتمال نجاح العملية م من المرات .

الحـــل :

فى المثال الأول حصلنا على احتمال نجاح العملية خلال م من المرات الأولى المتتالية وفشلها فى باقى المرات .

ولكن فى هذا المثال يريد السؤال عن احتمال نجاح العملية فى عدد م من المرات دون أن نتقيد بعدد م من المرات الأولى المتتالية . ولهذا لابد من ضرب الاحتمال الذى حصلنا عليه فى المثال الأول فى عدد طرق اختيار م من المرات

من بين ن من المرات أي بضرب الاحتمال السابق × $\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{م}}$ وبهذا يكون الاحتمال المطلوب .

$$= \text{ح}^{\text{م}} \times \text{ل}^{\text{ن}-\text{م}} \times \frac{|\underline{\text{ن}}}{|\underline{\text{م}}\ \ |\underline{\text{ن}-\text{م}}}$$

المثال الثالث .

ألقيت بقطعة من النقود المتماثلة ١٠ مرات متتالية إلى أعلى .

أوجد احتمال الحصول على صورة في المرتين الأولى والثانية فقط .

الحل

الاحتمال المطلوب :

$$= \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٨} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{١٠} = \frac{١}{١٠٢٤}$$

وذلك تطبيقاً للقاعدة السابقة في المثال الاول .

الاحتمال المطلوب $= \text{ح}^{\text{م}} \times \text{ل}^{\text{ن}-\text{م}}$

عدد مرات التجربة $= ١٠$ أي $\text{ن} = ١٠$

عدد مرات الحصول على الصورة $= ٢$ أي $\text{م} = ٢$

$\text{ن} - \text{م} = ٨$

احتمال الحصول على الصورة $= \frac{١}{٢}$ في المرة الواحدة

احتمال الحصول على الكتابة $= \frac{١}{٢}$

المثال الرابع :

فى المثال السابق :

اوجد إحتمال الحصول على صورتين :

الحل :

بالاسترشاد بالمثال رقم (٢) فإن .

$$\text{الاحتمال المطلوب} = ح^{م} \times ل^{ن-م} \times {}^{ن}ق_{م}$$

$$= \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٨} \times {}^{١٠}ق_{٢}$$

$$= \left(\frac{١}{٢}\right)^{١٠} \times \frac{١٠ \times ٩}{٢}$$

$$= \frac{٤٥}{١٠٢٤}$$

المثال الخامس .

صندوق به ٨ كرات متشابهة فى كل شىء عدا اللون منها ٥ كرات حمراء ، ٣ كرات بيضاء ، سحب شخص كرة من الصندوق بطريقة عشوائية ثلاث مرات متتالية ، فاذا علم أنه كان يرد الكرة إلى الصندوق عقب كل مرة يسحب فيها الكرة .

فاوجد احتمال أن تكون الكرات التى تم سحبها منها ٢ حمراء وواحدة بيضاء ،

الحل :

احتمال سحب كرة حمراء فى المرة الواحدة $= \frac{٥}{٨}$

احتمال سحب كرة بيضاء في المرة الواحدة = $\frac{٣}{٨}$

عدد مرات السحب ٣ مرات .

ولو كان الاحتمال المطلوب هو سحب كرة حمراء في المرتين الأولى والثانية وبيضاء في الثالثة .

$$\text{لكان هذا الاحتمال} = \frac{٣}{٨} \times \frac{٥}{٨} \times \frac{٥}{٨}$$

$$= \frac{٣}{٨} \times \left(\frac{٥}{٨}\right)^{٢}$$

ولكن نظراً لأنه لم يحدد لنا هذا التحديد بل طلب منا احتمال الحصول على كرتين حمراوين خلال المرات الثلاث فان هذه العملية تحدث بعدد من الطرق مقداره $^{٣}ق_{٢} = ٣$.

لأنه يمكن أن نحصل على كرة حمراء إما

في المرة الأولى والثانية	
أو المرة الأولى والثالثة	٣ حالات
أو المرة الثانية والثالثة	

على هذا يكون الاحتمال المطلوب :

$$= ٣ \times \left(\frac{٥}{٨}\right)^{٢} \times \frac{٣}{٨}$$

$$= \frac{٢٢٥}{٥١٢}$$

المثال السادس :

سحب شخص ورقتين من مجموعة كاملة من أوراق اللعب . أوجد احتمال أن تكون كل من الورقتين المسحوبتين ولداً .

الحل :

عدد الطرق التي يمكن بواسطتها سحب ولدين من أربعة أولاد .

$$= \text{ق}^{٤}_{٢}$$

$$= ٦$$

، عدد طرق سحب ورقتين من ٥٢ ورقة $= \text{ق}^{٥٢}_{٢}$

$$= \frac{٥٢ \times ٥١}{٢ \times ١} = ١٣٢٦ \text{ طريقة}$$

$$\therefore \text{ الاحتمال المطلوب } = \frac{١}{١٣٢٦}$$

$$= \frac{١}{٢٢١}$$

المثال السابع :

ما هو احتمال الحصول على ولد وبنت في المثال السابق؟

الحل :

$$\text{الاحتمال المطلوب } = \frac{\text{ق}^{٤}_{١} \times \text{ق}^{٤}_{١}}{\text{ق}^{٥٢}_{٢}}$$

$$= \frac{١٦}{١٣٢٦}$$

$$= \frac{٨}{٦٦٣}$$

المثال الثامن :

في مجتمع معين إذا كان احتمال أن يكون المولود ذكراً = ٫٥٢ وبفرض أنه تم قيد ثلاث حالات ولادة بسجل المواليد ـ أوجد الاحتمالات الآتية :

١ ـ أن تكون الحالات الثلاث كلها من الذكور .

٢ ـ « « « « « من الإناث

٣ ـ أن يكون من الحالات الثلاث السابقة ٢ حالة ذكور وحالة واحدة إناث

٤ ـ أن يكون من الحالات الثلاث ٢ حالة إناث وحالة واحدة ذكور .

ثم أوجد مجموع الاحتمالات السابقة .

الحل :

١ ـ أن تكون الحالات الثلاث كلها من الذكور .

∴ احتمال أن يكون المولود ذكراً = ٫٥٢

∴ الاحتمال المطلوب = ٫٥٢ × ٫٥٢ × ٫٥٢

= (٫٥٢)^{٣}

= ٫٤٠٦٠٨

٢ ـ أن تكون الحالات الثلاث كلها من الإناث .

∴ احتمال أن يكون المولود ذكراً = ٫٥٢

فإن احتمال أن يكون المولود أنثى = ١ ـ ٫٥٢ = ٫٤٨

∴ الاحتمال المطلوب = ٫٤٨ × ٫٤٨ × ٫٤٨

= (٫٤٨)^{٣}

= ٫١١٠٥٩٢

٣ ــ احتمال قيد حالتي ذكور وحالة إناث

$= {}^{٣}ق_{٢} \times ٥٢, \times ٥٢, \times ٤٨,$

$= ٣ \times ١٢٩٧٩٢,$

$= ٣٨٩٣٧٦,$

٤ ــ احتمال قيد حالتي إناث وحالة ذكور

$= {}^{٣}ق_{٢} \times ٤١, \times ٤٨, \times ٥٢,$

$= ٣ \times ١١٩٨٠٨,$

$= ٣٥٩٤٢٤,$

∴ مجموع الاحتمالات السابقة

$= ١٤٠٦٠٨, + ١١٠٥٩٢, + ٣٨٩٢٧٦, + ٣٥٩٤٢٤,$

= واحد صحيح

أى أنه من المؤكد أن تكون حالات القيد بسجل المواليد إحدى الحالات الأربع السابقة

المثال التاسع :

باستخدام النتائج التي حصلت عليها في المثال السابق ــ أوجد الاحتمالات الآتية :

١ ــ أن تكون حالة قيد واحدة على الأقل من الذكور .
٢ ــ أن تكون حالتا قيد على الأكثر من الإناث .

الحــــل :

١ ــ أن تكون حالة قيد واحدة على الأقل من الذكور يتحقق الاحتمال المطلوب إذا كان هناك حالة قيد واحدة من الذكور أو إذا كان هناك حالتين من الذكور أو إذا كانت حالات القيد الثلاث من الذكور .

ومن المثل السابق نجد أن الاحتمال المطلوب

= ٢٥٩٤٢٤و + ٣٨٩٣٧٦و + ١٤٠٦٠٨و
= ٨٨٩٤٠٨و

يمكن الحل بطريقة أسهل من الطريقة السابقة كما يلى :

مجموع الاحتمالات كلها = واحد صحيح .

∵ الحالة الوحيدة التى لا تحقق لنا الاحتمال هى الحالة التى تقيد فيها الحالات الثلاث إناث .

ولكن :

احتمال قيد الثلاث حالات إناث = ١١٠٥٩٢و٠

∴ الاحتمال المطلوب = ١ — ١١٠٥٩٢و
= ٨٨٩٤٠٨و

وهو نفس الجواب الذى حصلنا عليه من الحل الأول .

٢ — أن تكون حالتا قيد على الأكثر من الإناث .

الاحتمال المطلوب = احتمال عدم وجود إناث (احتمال حالات الذكور)
+ احتمال قيد حالة إناث واحدة
+ احتمال قيد حالتى إناث .

= ١٤٠٦٠٨و + ٣٨٩٣٧٦و + ٣٥٩٤٢٤و
= ٨٨٩٤٠٨و

أى الاحتمال المطلوب = ١ — (احتمال قيد الثلاث حالات إناث)
= ١ — ١١٠٥٩٢و
= ٨٨٩٤٠٨و

المثال العاشر :

كيس به ٣٠ كرة منها ٤ كرات سوداء ، ٨ كرات خضراء ، ١٨ كرة صفراء . سحبنا منه ٨ كرات بطريقة عشوائية . أوجد احتمال أن يكون منها ٣ كرات سوداء ، ٢ خضراء ، ٣ صفراء .

الحـــل :

$$\text{الاحتمال المطلوب} = \frac{{}^{١٨}\text{ن}_{٣} \times {}^{٨}\text{ن}_{٢} \times {}^{٤}\text{ن}_{٣}}{{}^{٣٠}\text{ن}_{٨}}$$

$$= \frac{٨١٦ \times ٢٨ \times ٤}{٥٨٥٢٩٢٥}$$

$$= \frac{٩١٣٩٢}{٥٨٥٢٩٢٥}$$

المثال الحادى عشر :

صندوقان بالأول ٥ كرات حمراء ، ٣ كرات بيضاء وبالثانى ٦ كرات حمراء ، ٥ كرات بيضاء . فإذا سحبنا كرة من كل صندوق بطريقة عشوائية فأوجد احتمال :

١ ــ أن تكون كل من الكرتين المسحوبتين اللون حمراء .

٢ ــ أن تكون كل من الكرتين المسحوبتين بيضاء اللون .

٣ ــ أن تكون إحداهما حمراء والأخرى بيضاء .

ثم أوجد مجموع الاحتمالات السابقة .

الحـــل :

احتمال سحب كرة حمراء من الصندوق الاول $= \frac{٥}{٨}$

، احتمال سحب كرة بيضاء من الصندوق الأول $= \frac{٣}{٨}$

، « « « حمراء « « الثانى $= \frac{٦}{١١}$

، « « « بيضاء « « « $= \frac{٥}{١١}$

وعلى ذلك :

١ ــ احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان حمراوتين $= \frac{٥}{٨} \times \frac{٦}{١١}$

$= \frac{٣٠}{٨٨}$

٢ ــ « « « « « « بيضاوين $= \frac{٣}{٨} \times \frac{٥}{١١}$

$= \frac{١٥}{٨٨}$

٣ ــ احتمال أن تكون إحدى الكرتين حمراء والأخرى بيضاء معناه احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من الصندوق الاول حمراء ومن الصندوق الثانى بيضاء أو العكس (الكرة المسحوبة من الصندوق الأول بيضاء ومن الثانى حمراء) .

وحيث أن العلاقة هنا علاقة مانعة أو طاردة لان حدوث الحادث بالطريقة الاولى يمنع حدوثه بالطريقة الثانية

∴ الاحتمال المطلوب = مجموع الاحتمالين

$$\left(\frac{٦}{١١} \times \frac{٣}{٨}\right) \times \left(\frac{٥}{١١} \times \frac{٥}{٨}\right) =$$

$$\frac{١٨}{٨٨} + \frac{٢٥}{٨٨} =$$

$$\frac{٤٣}{٨٨} =$$

ومجموع الاحتمالات فى (١) ، (٢) ، (٣)

$$\frac{٤٣}{٨٨} + \frac{١٥}{٨٨} + \frac{٣٠}{٨٨} =$$

= واحد صحيح لأنه من المؤكد تحقق أحد الاحتمالات السابقة .

المثال الثانى عشر :

والهدف من هـذا المثال هو إيضاح بعض الحقائق الهامة لنظرية الاحتمالات .

نفرض أن خبرة الماضى لوكيل شركة أوبل أثبتت الحقائق الآتية . –

عدد السيارات المباعة ماركة ركورد = ٦٠٠ سيارة

عدد السيارات المباعة ماركة كاديت = ٤٠٠ سيارة

بالنسبة لسيارات الركورد تبين أن الألوان كانت كما يلى :

٣٠٠ بيضاء ، ٢٠٠ حمراء ، ١٠٠ سوداء

وبالنسبة لسيارات الكاديت كانت الألوان كما يلي : —

٤٥٠ بيضاء ، ١٨٠ حمراء ، ٧٠ سوداء

فى هذه الحالة وبفرض أن ما سيحدث فى المستقبل هو صورة من الماضى وبفرض أن :

الأحداث

شراء سيارة ركورد = ر

شراء سيارة كاديت = ك

اللون الأبيض = ل_1

اللون الأحمر = ل_2

اللون الأسود = ل_3

فى هذه الحالة يمكن إستنتاج الإحتمالات الآتية —

١ — إحتمال طلب سيارة ركورد

$$\text{ح}(\text{ر}) = \frac{\text{ن}(\text{ر})}{\text{ن}(\Omega)}$$

$$= \frac{٦٠٠}{١٠٠٠} = ٦,$$

٢ — إحتمال طلب سيارة كاديت $= \frac{٤٠٠}{١٠٠٠} = ٤,$

وهكذا

وبهذا يمكن تكوين جدول إحتمالات بدلا من جدول خبرات الماضى

جدول الخبرة

النوع ↓ / اللون ←	أبيض	أحمر	أسود	المجموع
ركورد	٣٠٠	٢٠٠	١٠٠	٦٠٠
كابيت	١٥٠	١٨٠	٧٠	٤٠٠
المجموع	٤٥٠	٣٨٠	١٧٠	١٠٠٠

جدول الإحتمالات

	$ل_١$	$ل_٢$	$ل_٣$	المجموع
ر	٣٠و	٢٠و	١٠و	٦٠و
ك	١٥و	١٨و	٠٧و	٤٠و
المجموع	٤٥و	٣٨و	١٧و	١

ويمكن من الجدول السابق إستنتاج الإحتمالات الآتية : —

١ – احتمال أن العميل يطلب سيارة ركورد لونها أبيض

$$\text{ح}(\text{س ل}_1) = \frac{\text{ن}(\text{س} \cap \text{ل}_1)}{\text{ن}(\Omega)}$$

$$= \frac{٣٠٠}{١٠٠٠} = ٫٣٠$$

ويمكن الحصول على هذا الإحتمال من الجدول مباشرة
(عمود أول صف أول)

٢ – إحتمال أن العميل يطلب سيارة كاديت حمراء

$$\text{ح}(\text{ص ل}_2) = \frac{\text{ن}(\text{ص} \cap \text{ل}_2)}{\text{ن}(\Omega)}$$

$$= \frac{١٨٠}{١٠٠٠} = ٫١٨$$

وهذا الاحتمال يمكن الحصول عليه من الجدول مباشرة
(عمود ثان صف ثان) = ٫١٨

وهكذا بالنسبة لباقي الإحتمالات التي يمكن الحصول عليها من الجدول

ويلاحظ أن ح (س) أي إحتمال أن يطلب العميل سيارة ركورد = ٫٦٠

وهو يساوي ٫٣ + ٫٢ + ٫١

أي أن

$$\text{ح}(\text{س}) = \text{ح}(\text{س ل}_1) + \text{ح}(\text{س ل}_2) + \text{ح}(\text{س ل}_3)$$

ويطلق على ذلك الإحتمال الحدي للحدث س

أي أن الإحتمال الحدي لحدث معين

= مجموع إحتمالات الحوادث التي لها خواص هذا الحدث

وعلى ذلك فالإحتمال الحدى لأن يطلب العميل سيارة ركورد من أى نوع
= إحتمال أن يطلب العميل سيارة ركورد

والان ننتقل إلى إحتمال آخر
ماهو إحتمال أن الشخص الذى يريد سيارة ركورد سيختار اللون الأبيض ؟
والمقصود هنا
هو أن العميل قد إختار فعلا السيارة الركورد وأن المطلوب هو قياس إحتمال
أن يكون اللون أبيضاً

أى الإحتمال الشرطى بأن العميل سيختار سيارة بيضاء بفرض بأن لدينا
الحقيقة المقررة سلفا وهو أن نوع السيارة المطلوبة ركورد : .

فى هذه الحالة تصبح لدينا مجموعة الحلول $ن(\Omega) = ٦٠٠$
وعدد السيارات البيضاء = ٣٠٠

$$\text{الإحتمال} = \frac{٣٠٠}{٦٠٠} = \frac{١}{٢}$$

ويمكن كتابة هذا الاحتمال كما يلى : —

$$ح(ل_١ / ر) = \frac{ن(ل_١ \cap ر)}{ن(ر)}$$

$$= \frac{٣٠٠}{٦٠٠} = \frac{١}{٢}$$

وهذا الإحتمال يختلف عن الإحتمال المشترك لطلب سيارة ركورد وبيضاء
لأن هذا الإحتمال الأخير

$$= ح(ر ل_١) = \frac{ن(ل_١ \cap ر)}{ن(\Omega)}$$

$$= \frac{٣٠٠}{١٠٠٠}$$

وهو يساوى إحتمال طلب سيارة ركورد × احتمال أن تكون السيارة بيضاء

$$= \frac{٦٠٠}{١٠٠٠} \times \frac{٣٠٠}{٦٠٠} = \frac{٣٠٠}{١٠٠٠}$$

ويلاحظ أن الإحتمال الشرطى

$$\text{ح}(\text{ل}_1/\text{س}) = \frac{\text{ن}(\text{ل}_1 \cap \text{س})}{\text{ن}(\text{س})}$$

$$= \frac{\text{ن}(\text{ل}_1 \cap \text{س}) \div \text{ن}(\Omega)}{\text{ن}(\text{س}) \div \text{ن}(\Omega)}$$

وذلك بقسمة كل من البسط والمقام على ن (Ω)

$$= \frac{\text{ح}(\text{ل}_1 ، \text{س})}{\text{ح}(\text{س})}$$

= الإحتمال المشترك لطلب سيارة ركورد وبيضاء مقسوما على إحتمال طلب سيارة ركورد من أى لون

وعموماً :

الإحتمال الشرطى لحدث ب بفرض تحقق حادث آخر أ = الإحتمال المشترك للحدثين أ ، ب مقسوما على الإحتمال الحدى للحدث أ

$$\text{ح}(\text{ب}/\text{أ}) = \frac{\text{ح}(\text{أ ب})}{\text{ح}(\text{أ})}$$

محاولات برنولي

Bernoulli Trials

إذا عرفنا إحتمال نجاح حدث معين فإننا نعرف فى نفس الوقت إحتمال الفشل ، لأن إحتمال النجاح + الفشل = ١ كما سبق الإشارة اليه

فإذا كانت أ هي الفئة التي تشمل حالات النجاح ، ب هي الفئة التي تشمل حالات الفشل

فإن $\text{أ} \wedge \text{ب} = \Phi$

وكذلك $\text{أ} \vee \text{ب} = \Omega$

$\text{ح}(\text{أ} \wedge \text{ب}) = \text{صفر}$

$\text{ح}(\text{أ} \vee \text{ب}) = ١$

وحيث أ ، ب متنافران فإن

$$\therefore \text{ح}(\text{أ} \vee \text{ب}) = \text{ح}(\text{أ}) + \text{ح}(\text{ب})$$

أي أن

إحتمال النجاح + إحتمال الفشل = ١

وإذا فحصنا عينات من سلعة معينة في الماضي ووجدنا أن ٥٪ منها فاسداً و ٩٥٪ سالماً

فإن خبرة الماضي هذه تفيدنا في الإجابة على السؤال الآتي :

إذا كان إحتمال أن نجد وحدة فاسدة = ٥٪ فما هو احتمال أن تكون ٢٥ وحدة فاسدة من بين ١٠٠ وحدة تم فحصها

الإحتمال المطلوب

$$= ق_{٢٥}^{١٠٠} \times (٠,٠٥)^{٢٥} \times (٠,٩٥)^{٧٥}$$

وقد سبق أن أوضحنا السبب في الضرب في $ق_{٢٥}^{١٠٠}$

لأنه من الممكن أن تكون الخمسة وعشرين وحدة الأولى فاسدة والباقي سليما ومن الممكن أن يكون الخمسة وعشرون وحدة من رقم ٢ الى ٢٦ فاسدة أو من رقم ٣ الى ٢٧ وهكذا

لهذا ويجب أن نختار ٢٥ وحدة من ١٠٠ . وكل محاولة من هذه المحاولات تسمى محاولة برنولى وعندما تكون هذه المحاولات مستقلة عن بعضها البعض وأن نتيجة أى محاولة ليس لها تأثير على المحاولات الأخرى وبفرض أن احتمال النجاح = ح واحتمال الفشل = ل

فإن

$$ح(ر) = ق_{ر}^{ن} \, (ح)^{ر} \, (ل)^{ن-ر}$$

وتسمى هذه العلاقة بالإحتمال ثنائى الحدين لانه من الممكن استنباطها من مفكوك ذات الحدين $(ح + ل)^{ن}$

وبتطبيق هذه العلاقة فى حالة القاء زهرة واحدة من زهرات النرد عدة مرات يمكن الحصول على الإحتمالات الآتية وذلك بفرض أن احتمال النجاح وهو الحصول على رقم ٦ فى المرة الواحدة $= \frac{١}{٦}$ واحتمال الفشل $= \frac{٥}{٦}$

وأننا أجرينا التجربة ٥ مرات فإنه يمكن حساب احتمال النجاح صفر مرة ، مرة واحدة ، مرتين ..... ، ٥ مرات

وذلك بإعطاء ر القيم

صفر ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ فى العلاقة

$$ق_{ر}^{ن} \, (ح)^{ر} \, (ل)^{ن-ر}$$

على الوجه الآتى :

ر = عدد مرات النجاح ، ح (ر) = احتمال النجاح ر من المرات

ر	ح (ر)
صفر	$^{٥}ن_{صفر} (\frac{١}{٦})^{صفر} (\frac{٥}{٦})^{٥}$
١	$^{٥}ن_{١} (\frac{١}{٦}) (\frac{٥}{٦})^{٤}$
٢	$^{٥}ن_{٢} (\frac{١}{٦})^{٢} (\frac{٥}{٦})^{٣}$
٣	$^{٥}ن_{٣} (\frac{١}{٦})^{٣} (\frac{٥}{٦})^{٢}$
٤	$^{٥}ن_{٤} (\frac{١}{٦})^{٤} (\frac{٥}{٦})$
٥	$^{٥}ن_{٥} (\frac{١}{٦})^{٥} (\frac{٥}{٦})^{صفر}$

ويلاحظ ان هذه النتائج يمكن الحصول عليها من مفكوك المقدار ذى الحدين $(\frac{٥}{٦} + \frac{١}{٦})^{٥}$.

ومعنى هذا أنه لو كان لدينا احتمال النجاح والفشل للحالة الواحدة أو التجربة الواحدة فإنه من الممكن حساب احتمال النجاح لأى عدد من التجارب .

ويمكن أن نقيس الإحتمالات المختلفة

مثال (١) :

عند القاء زهرة نرد ما احتمال الحصول على رقم ٦ مرتين من ١٠ مرات

الحـــل

الاحتمال = $^{١٠}ن_{٢} (\frac{١}{٦})^{٢} (\frac{٥}{٦})^{٨}$

مثال (٢) :

ما احتمال الحصول على رقم ٦ مرتين على الأكثر (من المثال السابق

الحــــل

$$\text{الاحتمال} = \text{ع}(\text{س} \leq ٢)$$

$$= \text{ع}(\text{س} = \text{صفر}) + \text{ع}(\text{س} = ١) + \text{ع}(\text{س} = ٢)$$

$$\text{ن}^{١٠}_{\text{صفر}} \left(\frac{١}{٦}\right)^{\text{صفر}} \left(\frac{٥}{٦}\right)^{١٠} + \text{ن}^{١٠}_{١} \left(\frac{١}{٦}\right) \left(\frac{٥}{٦}\right)^{٩}$$

$$+ \text{ن}^{١٠}_{٢} \left(\frac{١}{٦}\right)^{٢} \left(\frac{٥}{٦}\right)^{٨}$$

مثال (٣) :

ألقيت بعملة ٤ مرات الى أعلى

أوجد احتمال الحصول على صورة ٣ مرات على الأكثر

الحـــل

$$\text{الاحتمال هو} \quad \text{ع}(\text{س} \leq ٣)$$

$$= \text{ع}(\text{س} = \text{صفر}) + \text{ع}(\text{س} = ١) + \text{ع}(\text{س} = ٢)$$

$$+ \text{ع}(\text{س} = ٣)$$

$$= \frac{١}{١٦} + \frac{٤}{١٦} + \frac{٦}{١٦} + \frac{٤}{١٦} = \frac{١٥}{١٦}$$

ويمكن الوصول الى الحل بطريقة الإستبعاد كما يلى :

الحالة الوحيدة التى لا تحقق لاحتمال هى حالة الحصول على الصورة ٤ مرات

احتمال الحصول على الصورة ٤ مرات

$$= \text{ن}^{٤}_{٤} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٤} \left(\frac{١}{٢}\right)^{\text{صفر}}$$

$$= \left(\frac{١}{٢}\right)^{٤} = \frac{١}{١٦}$$

الإحتمال المطلوب = ١ − $\frac{١}{١٦}$ = $\frac{١٥}{١٦}$

مثال (٤)

آلة تنتج سلعة معينة فإذا دلت التجارب على أن احتمال أن تكون السلعة معطوبة = ٠,٠٥ أخذنا ٥ وحدات بطريقة عشوائية

أوجد الاحتمالات الآتية :ـ

(١) أن تكون الثلاث وحدات الأولى معطوبة

(٢) أن تكون ثلاث وحدات معطوبة تماما

(٣) أن تكون ثلاث وحدات معطوبة على الأقل

(٤) أن تكون ثلاث وحدات معطوبة على الأكثر

الحـــل

(١) أن تكون الثلاث وحدات الأولى معطوبة
معنى ذلك أن الوحدتين الأخرتين سليمتان ويكون الاحتمال

$= (٠,٠٥)^{٣} (٠,٩٥)^{٢}$

(٢) أن تكون ثلاث وحدات معطوبة

$= {}^{٥}ق_{٣} (٠,٠٥)^{٣} (٠,٩٥)^{٢}$

(٣) أن تكون ثلاث وحدات معطوبة على الأقل

$= ح(ر \geq ٣)$

$= ح(ر = ٣) + ح(ر = ٤) + ح(ر = ٥)$

$= {}^{٥}ق_{٣} (٠,٠٥)^{٣} (٠,٩٥)^{٢} + {}^{٥}ق_{٤} (٠,٠٥)^{٤} (٠,٩٥) + (٠,٠٥)^{٥}$

(٤) أن تكون ثلاث وحدات معطوبة على الأكثر

= ح (س $\leq$ ٣)

أو

= ١ − ح (س $\geq$ ٤)

= ح (س = صفر) + ح (س = ١) + ح (س = ٢)

+ ح (س = ٣)

= $(٠,٩٥)^{٥}$ + $ق^{٥}_{١}$ $(٠,٠٥)$ $(٠,٩٥)^{٤}$

+ $ق^{٥}_{٢}$ $(٠,٠٥)^{٢}$ $(٠,٩٥)^{٣}$ + $ق^{٥}_{٣}$ $(٠,٠٥)^{٣}$ $(٠,٩٥)^{٢}$

أو

= ١ − [$ق^{٥}_{٤}$ $(٠,٠٥)^{٤}$ $(٠,٩٥)$ + $(٠,٠٥)^{٥}$]

تمارين متنوعة على الاحتمالات

١ ــ ألقيت بزهرة من زهرات النرد مرتين متتاليتين إحسب احتمال الحصول على الرقم ٦ مرة على الأقل .

٢ ــ صندوقان بالأول ١٠ كرات زرقاء ، ٥ كرات بيضاء وبالثانى ٤ كرات زرقاء ، ٦ كرات بيضاء سحبنا كرة من كل صندوق بطريقة عشوائية ، أجد احتمال :

(أ) أن تكون كلاهما زرقاء
(ب) « « « بيضاء .
(حـ) « « إحداهما زرقاء والأخرى بيضاء .
(ء) أوجد مجموع الاحتمالات السابقة .

٣ ــ صندوق به ٥ كرات حمراء ، ٣ كرات زرقاء ، ٦ كرات خضراء وسحبنا منــه كرة بطريقة عشوائية ثلاث مرات متتالية . احسب احتمال أن وتكون الكرات الثلاث المسحوبة من النوع الأحمر والأزرق والأخضر على الترتيب ذلك بفرض :

أولا : أن الكرة التى تسحب من الصندوق ترد قبل السحب التالى .

ثانياً : أن الكرة التى تسحب من الصندوق لا ترد .

٤ ــ ألقيت بزهرتين من زهرات النرد ثلاث مرات متتابعة على سطح أملس . أوجد إحتمال الحصول على مجموع ٩

أولا : مرة واحدة فقط .
ثانياً : مرة على الأقل .
ثالثاً : مرتين على الأكثر .

٥ - ا ، ب شخصان احتمال وفاتهما خلال ١٠ سنوات يساوي $\frac{1}{5}$ ، $\frac{1}{4}$ على الترتيب ــ أوجد الاحتمالات الآتية :

(ا) أن يموت ا ، ب قبل نهاية العشر سنوات.

(ب) أن يعيش الإثنان حتى نهاية العشر سنوات .

(حـ) أن يعيش واحد على الأقل حتى نهاية العشر سنوات .

(ء) أن يموت واحد على الأقل قبل نهاية العشر سنوات .

٦ ــ مجموعة كاملة من أوراق اللعب (٥٢ ورقة) سحبنا منها ٣ ورقات مرة واحدة . أوجد احتمال أن تكون الأوراق المسحوبة تحمل الأرقام ٨ ، ٩ ، ١٠

٧ ــ فى التمرين السابق أوجد الاحتمال بفرض إننا سحبنا ورقة واحدة ثلاث مرات متتالية دون رد الورقة المسحوبة .

٨ ــ مجموعة من أوراق اللعب عددها ١٦ ورقة عبارة عن ٤ أولاد ، ٤ بنات ، ٤ رجال ، ٤ عشرات . تم توزيعها بطريقة عشوائية بين اللاعبين ا ، ب ــ وجد احتمال حصول اللاعب ا على الأربعة أولاد .

٩ ــ آلة تنتج سلعة معينة وتبلغ نسبة الوحدات التالفة ١٠٪ من الإنتاج . أخذنا خمسة وحدات بطريقة عشوائية أوجد الاحتمالات الآتية :

(ا) أن يكون منها ٣ وحدات تالفة تماماً .

(ب) أن يكون منها ٣ وحدات تالفة على الأقل .

(حـ) ألا يكون بها أى وحدات تالفة .

(ء) أن تكون كلها تالفة .

١٠ ــ كيس به ٥ كرات سحبت منه بطريقة عشوائية كرة أو أكثر أوجد احتمال أن يكون عدد الكرات المسحوبة فرديا .

إرشاد :

عدد الطرق التى يمكن بها سحب كرة أو أكثر

= ٢^{٥} − ١ = ٣١ طريقة

عدد الطرق التى تحقق الرغبة

= حالة سحب كرة أو ثلاث كرات أو ٥ كرات

= $^{٥}\text{ن}_{١} + {}^{٥}\text{ن}_{٣} + {}^{٥}\text{ن}_{٥}$

= ٥ + ١٠ + ١ = ١٦

والاحتمال المطلوب = $\frac{١٦}{٣١}$

القيمة المتوقعة

Expected Value

مقدمة :

من السهل على الانسان أن يتخذ ما يشاء من القرارات في ظل أمور واضحة ومؤكدة — فعند شراء سلعة متماثلة فإنه يبحث عن أرخص المصادر لشراء هذه السلعة وهو يقارن بين التكاليف ويختار المصدر الذى يمكنه من الحصول على السلعة بأقل تكلفة ممكنة

ولكن عندما نصبح أمام حالة من عدم التأكد ، فإننا نتخذ القرارات على ضوء توقعاتنا للنتائج وبالتالى على ضوء القيم المختلفة للتوقعات المختلفة

والقيمة المتوقعة لأى حدث
= قيمة العائد من تحقق هذا الحدث × احتمال حدوث هذا الحدث

فمثلا الشخص الذى يلعب لكسب رهان معين فإن القيمة المتوقعة لهذا الحدث (كسب الرهان)
= قيمة الرهان × احتمال الفوز به

[illegible] المتوقعة يمكن استخدامها فى بعض التطبيقات التجارية للحصول [illegible] أكبر ربح وذلك بحساب القيم المتوقعة المختلفة لإختيار أعلى هذه القيم كما هو واضح بالمثال الآتى :

تاجر يبيع سلعة معينة ، ويربح فى كل وحدة يبيعها ١٠ قروش ويخسر فى كل وحدة لا يستطيع [illegible] ٥ قروش
(اما نتيجة لأن السلعة قابلة للتلف أو لأى سبب آخر)

ويريد أن يحدد الكمية الواجب تخزينها من هـذه السلعة للحصول على أكبر قيمة متوقعة ممكنة . وبرجوعه الى خبرات الماضى تبين له أن أرقام مبيعاته كانت كما يلى وذلك عن ١٠٠ يوم

رقم المبيعات	التكرار
٢٠٠ وحدة	٥٠ يوما
٣٠٠ «	٣٠ «
٤٠٠ «	٢٠ «
٥٠٠ «	صفر «

الحـــل

أولا : تكوين جدول احتمالات

واضح أن الأيام موضوع الدراسة كانت ١٠٠ يوم وأنه خلال ٥٠ يوما كان يبيع ٢٠٠ وحدة وعلى ذلك فاحتمال أن يبيع ٢٠٠ وحدة فى أى يوم من الأيام

$$= \frac{٥٠}{١٠٠} = \frac{١}{٢}$$

واحتمال أن يبيع ٢٠٠ وحدة $= \frac{٣٠}{١٠٠} = ٠,٣$

واحتمال بيعه ٤٠٠ وحدة $= \frac{٢٠}{١٠٠} = ٠,٢$

وأما احتمال أن يبيع ٥٠٠ وحدة = صفر

وعلى ضوء هذا يمكن قياس القيم المتوقعة للبدائل المختلفة المعروضة أمامه

أولا : إذا قرر التاجر أن يخزن ٢٠٠ وحدة فإن القيمة المتوقعة يمكن حسابها كما يلى :

فى حالة بيع ٢٠٠ وحدة فعلا يكون الربح الكلى المتوقع

$$= ٢٠٠ \times ١٠ \times \frac{١}{٢} = ١٠٠٠ \text{ قرش}$$

حيث أن ربح الوحدة الواحدة = ١٠ قروش
واحتمال أن يبيع ٢٠٠ وحدة = $\frac{١}{٢}$
ولكن من المحتمل أيضاً وبنسبة ٠,٣ أن يطلب ٣٠٠ وحدة ويكون الربح المتوقع
٢٠٠ × ١٠ × ٠,٣ = ٦٠٠ قرش

ويلاحظ هنا أننا ضربنا ٢٠٠ وليس ٣٠٠ لأنه لا يمكن التاجر أن يبيع أكثر من الكمية التي قرر تخزينها

ومن الممكن أيضا رغم أنه قام بتخزين ٢٠٠ وحدة فقط أن يطالب منه شراء ٤٠٠ وحدة باحتمال ٠,٢ ولكنه في هذه الحالة لن يبيع سوى ٢٠٠ وحدة وتكون قيمة الربح المتوقع = ٢٠٠ × ١٠ × ٠,٢ = ٤٠٠ قرش

وعلى هذا يكون قيمة الربح المتوقع في حالة تخزين ٢٠٠ وحدة
= [(٢٠٠ × ١٠ × ٠,٥) + (٢٠٠ × ١٠ × ٠,٣) + (٢٠٠ × ١٠ × ٠,٢)]
= ١٠٠٠ + ٦٠٠ + ٤٠٠ = ٢٠٠٠ قرش

وبالمثل يمكن حساب قيمة الربح المتوقع في حالة تخزين ٣٠٠ وحدة على الوجه التالي :—

١ — إذا طلب ٢٠٠ وحدة فقط يربح ٢٠٠ × ١٠ ويخسر ١٠٠ × ٥
والقيمة المتوقعة لصافي الربح = ٠,٥ (٢٠٠٠ — ٥٠٠) = ٧٥٠ قرشا

٢ — إذا طلب ٣٠٠ وحدة يربح ٣٠٠ × ١٠
والقيمة المتوقعة لهذا الربح = ٣٠٠٠ × ٠,٣ = ٩٠٠ قرش

٣ — إذا طلب ٤٠٠ وحدة فانه يبيع ٣٠٠ وحدة الموجودة عنده والربح المتوقع
= ٣٠٠ × ١٠ × ٠,٢ = ٦٠٠ قرش
ويكون الربح المتوقع في حالة تخزين ٣٠٠ وحدة
= ٧٥٠ + ٩٠٠ + ٦٠٠ = ٢٢٥٠ قرشا
كما يمكن حساب قيمة الربح المتوقع في حالة تخزين ٤٠٠ وحدة فنجده
= ٢٠٠٠ قرشا

كما يمكن حساب الربح المتوقع في حالة تخزين ٥٠٠ وحدة فنجده = ١٥٥٠

وبهذا تكون أكبر قيمة متوقعة للربح = ٢٢٥٠ عندما يكون المخزون = ٣٠٠ وحدة

ويمكن تلخيص هذه النتائج في الجدول الآتي :

الطلب		البدائل المختلفة للمخزون السلعي			
عدد	احتمال	٢٠٠ وحدة	٣٠٠ وحدة	٤٠٠ وحدة	٥٠٠ وحدة
٢٠٠	٥ر	١٠٠٠ ٢٠٠٠	٧٥٠ ١٥٠٠	٥٠٠ ١٠٠٠	٢٥٠ ٥٠٠
٣٠٠	٣ر	٦٠٠ ٢٠٠٠	٩٠٠ ٣٠٠٠	٧٥٠ ٢٥٠٠	٦٠٠ ٢٠٠٠
٤٠٠	٢ر	٤٠٠ ٢٠٠٠	٦٠٠ ٣٠٠٠	٨٠٠ ٤٠٠٠	٧٠٠ ٣٥٠٠
٥٠٠	صفر	صفر ٢٠٠٠	صفر ٣٠٠٠	صفر ٤٠٠٠	صفر ٥٠٠٠
القيمة المتوقعة		٢٠٠٠	٢٢٥٠	٢٠٠٠	١٥٥٠

ويلاحظ من الجدول السابق أن القيمة السفلى = صافي الربح والقيمة العليا تمثل القيمة المتوقعة لصافي الربح أي بعد ضرب صافي الربح × احتمال الحصول عليه

ملخص لأهم مبادئ نظرية الإحتمالات

مع آمثلة محلوله للإيضاح

(١) الفئة الشامله هى الفئة التى تشمل جميع العناصر الناشئة عن إجراء تجربة معينة وتسمى فئة فضاء العينة Sample Space ويرمز لها بالرمز Ω

وإحتمال ونوع الحادث أ ويعبر عنه بالرمز ح (أ) = عدد عناصر الفئة أ مقسوما على عدد عناصر الفئة الشاملة حيث (أ) ≥ الصفر

، ح (أ) ≥ من الواحد الصحيح

ونعبر عن ذلك بالقول صفر ≥ ح (أ) ≥ ١

وكذلك ح (Ω) = ١

(٢) يقال للحدثين أ ، ب أنهما مانعان أو طاردان إذا كان وقوع أحدهما يمنع وقوع الآخر «Mutually exclusive »

فمثلا إذا ألقينا بزهرة طاوله لا يمكن الحصول على رقم ٥ ، ٦ فى نفس الوقت وإذا ألقينا بعمله لا يمكن الحصول على صوره وكتابة فى نفس الوقت ولذلك فإن إحتمال حدوث الحدثين المانعين = صفر أى أن ح (أ ∩ ب) = صفر

وإذا كان الحدثان أ ، ب مانعين فإن ح (أ و ب) = ح (أ) + ح (ب) .

(٣) إذا كانت ø هى الفئة الخالية أى التى لا يوجد بها عناصر فإن:
ح (ø) = صفر

(٤) إذا كان الحدث أ َ هو الحدث المكمل للحدث أ فإن ح (أ َ)
=١-ح(أ)

فمثلا عند القاء زهرة طاولة واحدة فإن الفئة الشاملة = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥، ٦}

الحدث أ هو الحصول على رقم يقل عن ٥

= { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ، ح (أ) = $\frac{٤}{٦}$

الحدث المكمل أ َ = باقى عناصر الفئة الشاملة = { ٥ ، ٦ }

ح (أ َ) = $\frac{٢}{٦}$ = ١- ح (أ)

وعموما للتذكره ح (أ و ب) معناه إحتمال حدوث أ أو ب أوهما معا،ح (أ∩ ب) إحتمال حدوث أ ، ب معا ، ح (أ) هو احتمال عدم حدوث أ لان أ معناه الحدث الذى يقع إذا لم يحدث أ

٥- قاعدة عامه

إحتمال حدوث أحد الحادثين أ أو ب أوكلاهما

ح (أ و ب) = ح (أ) + ح (ب) – ح (أ ∩ ب)

احتمال حدوث الأول + احتمال حدوث الثانى-إحتمال حدوث الحادثين معا

ولذلك إذا كان أ ، ب متنافرين فإن ح (أ∩ ب) = صفر

وكذلك ح (أ U ب) = ح (أ) + ح (ب)

لأنه فى بعض الأحيان لا تكون العلاقة بين أ ، ب علاقة تنافر فإن – بل قد يكون هناك مشاركه بصورة جزئية فمثلا إذا كان الحدث أ هو الحصول على ورقة حمراء من مجموعة كاملة من أوراق اللعب (كوتشينه) والحدث ب هو الحصول على ولد

ما هى العلاقه بين الحدثين أ ، ب ؟

	أ ∩ ب	أ / ب

ب　　　　أ

الحدث أ يتقسم إلى

أ / ب ، أ ∩ ب

ح (أ) = ح (أ / ب) + ح (أ ∩ ب)

احتمال الحصول على ولد أحمر = ح (أ) + ح (ب) – ح (أ ∩ ب)

$= \frac{٢٦}{٥٢} + \frac{٤}{٥٢} - \frac{٢}{٥٢} = \frac{٢٨}{٥٢}$

(٦) الاحتمالات الشرطية

أ ، ب حدثان ، ح (ب) > صفر

ح (أ/ ب) = إحتمال حدوث الحدث أ بفرض أن الحدث ب قد وقع = $\frac{ح (أ \cap ب)}{ح (ب)}$

مثال

ألقيت بزهرة طاولة وعرفت أن الحدث ب قد وقع وهو الحصول على رقم فردى ما إحتمال حدوث الحدث أ وهو الحصول على رقم ٥

حيث أن الحدث أ هو الحصول على رقم ٥ بفرض أننا عرفنا أن الحدث ب قد وقع وهو الحصول على رقم فردى أى { ١ أو ٣ أو ٥ } = $\frac{١}{٣}$

والطريقة أخرى ∵ ح (أ ∩ ب) ←—— الحصول على رقم فردى ، ٥ = $\frac{١}{٦}$

ح (ب) الحصول على رقم فردى = $\frac{٣}{٦}$

$$\frac{ح(أ \cap ب)}{ح(ب)} = \frac{١}{٦} \div \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٣}$$

وهى نفس النتيجة الى وصلنا لها سابقا

$$\therefore ح(أ / ب) = \frac{ح(أ \cap ب)}{ح(ب)}$$

$$= \frac{|أ \cap ب|}{|ب|} = \frac{١}{٣}$$

(٧) الاحداث المستقله Independent

يقال للحدث أ بأنه مستقل عن الحدث ب إذا كان وقوع أحدها لا يؤثر فى وقوع الآخر

فى هذه الحالة نجد أن إحتمال وقوع أ بفرض أن ب قد وقع = تماما إحتمال ونوع أ

أى أن ح (أ / ب) = ح (أ)

إحتمال حدوث الحدثين معا = ح (أ ∩ ب)

= ح (أ) × ح (ب)

وهى قاعدة عامه مهما تعددت الأحداث

(٨) الأحداث المرتبطة Dependent

احتمال وقوع حدثين أ ، ب

= ح (أ) يؤثر فى ح (ب)

ح (أ ∩ ب) = ح (أ) × ح (ب) ــــ> نفرض أن أ قد وقع

= ح (أ) × ح (ب/أ)

أو تساوى ح (ب) × ح (أ) بفرض أن ب قد وقع وعموما يمكن القول بأن ح (أ∩ ب) = ح (أ/ب) × ح (ب) = ح (ب/أ) × ح (أ)

فإذا كان الحدثان مستقلين فإن ح (أا ب) = ح (أ) × (ح ب) لأن ح (أ/ب) = ح (أ) وكذلك ح (ب/أ) = ح (ب) عندما يكون الحدثان أ ، ب مستقلين عن بعضهما البعض وعموما فإن القاعدة هنا هى قاعدة الضرب كل ما هنالك هو مراعاة الأرتباط إن وجد بين الحدثين أ ، ب فمثلا إذا كان هناك صندوق به ١٠ وحدات من بينها ٣ وحدات تالفه وسحبنا وحدتين على التتابع دون رد فاحتمال أن تكون الوحدتان تالفتين = ح (أ) ــــ> احتمال السحب فى المرة الأولى × ح (ب/أ) ــــ> احتمال السحب فى المرة الثانية بفرض أن الحدث قد وقع فى المرة الأولى

$$= \frac{٣}{١٠} \times \frac{٢}{٩} = \frac{٦}{٩٠}$$

وأما لو أرجعنا الوحده المسحوبة فى المدة الأولى قبل السحب فى المرة الثانية لكان الاحتمال $= \frac{٣}{١٠} \times \frac{٣}{١٠} = \frac{٩}{١٠٠}$

قاعدة هامة : يعتبر الحدث أ مستقلا عن الحدث ب إذا كان :

ح (أ∩ ب) = ح (أ) × (ب) وإلا كان الحدثان مرتبطين أى غير مستقلين عن بعضهما البعض .

مثال ذلك صندوق به ٣ وحدات من منتج معين ولدينا الحدث (أ) الصندوق به وحدات سليمه ومعطوبة والحدث ب الصندوق به وحدة واحدة على الأكثر معطوبه

فئة فضاء العينة Ω = { س س س ، س س م ، س م س ، م س س ،
س م م ، م س م ، م م س ، م م م }

الفئة أ ={ س م م ، س س م ، م م س ، س س م ، س م س ، م س س }

$ح (أ) = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$

الفئة ب = {س س س ، م س س ، س م س ، س س م } ح (ب) = $\frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

ح (أ) × ح (ب) = $\frac{٣}{٤} \times \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٨}$ ، ح (أ ∩ ب) = $\frac{٣}{٨}$

∴ أ ، ب حدثان مستقلان .

(٨) نظرية بييز Baye's Farmula

مصنع به ثلاثه خطوط إنتاج ، الأول أ والثانى ب والثالث حـ

الأنتاج = ٦٠٠ وحده ، ٣٠٠ وحده ، ١٠٠ وحده على الترتيب

الوحدات المعطوبه = ١٢ وحده ، ٩ وحدات ، ٥ وحدات على الترتيب

من الواضح أن إجمالى انتاج المصنع = ١٠٠٠ وحدة

وعدد الوحدات التالفة = ٢٦ وحدة

وإحتمال أن تكون الوحدة تالفه من إنتاج المصنع كله = ٢,٦ ٪

يمكن إعداد الجدول التالى :-

(٥) احتمال ان تكون من انتاج العنبر ومعطوبه (٣) × (٤)	(٤) احتمال العطب من انتاج كل عنبر على حده	(٣) احتمال الإنتاج للعنابر الثلاثة	(٢) كمية الإنتاج	(١) العنابر
٠,٠١٢٠	,٠٢	,٦٠	٦٠٠	أ
٠,٠٠٩٠	,٠٣	,٣٠	٣٠٠	ب
,٠٠٥٠	,٠٥	,١٠	١٠٠	حـ
٠,٠٢٦٠				

وهنا يمكن الحصول على الاحتمالات السابقة واللاحقه كما يلى :-

ح (ت / أ) إحتمال أن تكون الوحدة تالفه بفرض أنها من إنتاج العنبر أ = ٢, ٠ وهو إحتمال شرطى

إحتمال أن تكون الوحده من إنتاج العنبر أ = ٦,

إحتمال أن تكون الوحدة من إنتاج العنبر أ وتالفه = ح (أ) × ح (ت/أ)

= ٦, × ٠,٠٢ = ٠,٠١٢

إحتمال أن تكون الوحدة من إنتاج العنبر ب = ٣,

إحتمال أن تكون الوحدة من إنتاج العتر ب وتالفه

= ٣٠, × ٠٣, = ٠٠٩,

وكذلك إحتمال أن تكون الوحدة من إنتاج العنبر حـ = ١,

وإحتمال أن تكون الوحدة من إنتاج العنبر (حـ) وتالفه

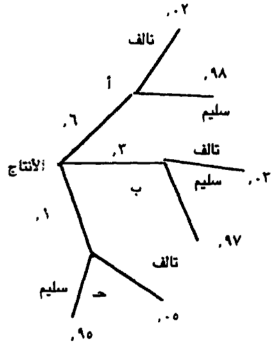
= ١, × ٠٥, = ٠٠٥,

وعلى ذلك إحتمال أن نكون تالفه إذا تم أخذها من إنتاج المصنع كله بطريقة عشوائيه

= ح (أ) × ح (ت/أ) + ح (ب) × ح (ت/ب) + ح (حـ) × ح (ت/حـ)

= ٦, × ٠٢, + ٣, × ٠٣, + ١, × ٠٥, = ٠٢٦,

ويمكن تمثيل ذلك بالشجرة التالية



والآن نسأل عن إحتمال آخر وهو الإحتمال اللاحق لوقوع الحدث Posteriori

بفرض أنك أخذت وحدة من إنتاج المصنع ووجدتها تالفه . ما إحتمال أن تكون من إنتاج العنبر أ ، ب ، حـ .

الأمر هنا يتوقف على مساهمة كل عنبر فى - من الجدول السابق من الواضح من العمود رقم (٥) فإن إحتمال التلف على مستوى المصنع كله =٠٢٦,

وأن العنبر أ ساهم بمقدار ٠١٢, والعنبر ب بمقدار ٠٠٩, والعنبر حـ بمقدار ٠٠٥,

وعلى ذلك يمكن أن نقول :

بفرض أن الوحدة وجدت تالفه فإحتمال أن تكون من العنابر الثلاثه هى

ح (أ/ت) = $\frac{٠١٢,}{٠٢٦,}$ = ٤٦,

ح (ب/ت) = $\frac{٠٠٩,}{٠٢٦,}$ = ٣٥,

ح (حـ (ت) = $\frac{٠٠٥,}{٠٢٦,}$ = $\frac{١٩,}{١}$

وعلى ذلك يمكن إستنتاج القانون الآتى :-

ح (أ /ت) = $\frac{\text{ح (أ) × ح (ت/أ)}}{\text{ح (أ) × ح (ت/أ) + ح(ب)×ح(ت/ ب) + ح (حـ) ×ح(ت/حـ)}}$

ح (ب/ت) = $\frac{\text{ح (ب) × ح (ت/ب)}}{\text{نفس المقام}}$

ح (حـ/ت) = $\frac{\text{ح (حـ) × ح (ت/حـ)}}{\text{نفس المقام}}$

امثله محلوله على الإحتمالات

مثال (١)

ثلاثه صناديق أ ، ب ، حـ بها ١٠ وحدات ، ٦ وحدات ، ٤ وحدات على الترتيب ويبلغ عدد الوحدات التالفه بها ٣ وحدات ، وحدتين ووحدة واحدة .

فإذا كانت فرص السحب من أى صندوق واحدة وأننا سحبنا وحدة واحدة بطريقة عشوائية من أحد هذه الصناديق ، مااحتمال أن تكون الوحدة تالفه وما إحتمال أن تكون سليمه .

الحل

إحتمال السحب من أى صندوق = $\frac{١}{٣}$

إحتمال التلف من الصندوق الأول = ٣,

والثانى $\frac{١}{٣}$ والثالث $\frac{١}{٤}$

إحتمال أن تكون الوحدة تالفه

$$= \frac{١}{٣} \times \frac{٣}{١٠} + \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣} + \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٤}$$

$$= \frac{٣}{٣٠} + \frac{١}{٩} + \frac{١}{١٢} = \frac{٥٣}{١٨٠}$$

إحتمال أن تكون الوحدة سليمه

$$= \frac{١}{٣} \times \frac{٧}{١٠} + \frac{١}{٣} \times \frac{٢}{٣} + \frac{١}{٣} \times \frac{٣}{٤} = \frac{١٢٧}{١٨٠}$$

وهى تساوى بطريقة الأستبعاد

$$١ - \frac{٥٣}{١٨٠} = \frac{١٢٧}{١٨٠}$$

مثال (٢)

في المثال السابق بفرض أن الوحدة التي سُحبت بطريقة عشوائية وجُدت تالفه ما إحتمال أن تكون من إنتاج كل من الصندوق الأول أ والصندوق ب والصندوق جـ

الاحتمال المطلوب = ح (أ/ت)

ح (أ/ت) = ح (أ) × ح (ت/أ) ÷ [ح (أ) × ح (ت/أ) + ح (ب) × ح (ت/ب) + ح (حـ) × ح (ت/حـ)]

= (١/٣ × ٫٣) ÷ (٥٢ ÷ ١٨٠) = ١٨ / ٥٢

ح (ب/ت) = (١/٣ × ١/٣) ÷ (٥٢ ÷ ١٨٠) = ٢٠ / ٥٢

ح (حـ / ت) = (١/٣ × ١/٣) ÷ (٥٢ ÷ ١٨٠) = ١٥ / ٥٢

ويلاحظ أن مجموع الإحتمالات = واحد صحيح لأن الوحدة التالفه يمكن أن تكون من الصندوق أ أو ب أو حـ

مثال (٣)

أحمد وعمرو وعادل يتنافسون لكسب مباراة فإذا كانت فرصه أحمد ضعف فرصة عمرو وفرصة عمرو ثلاثه أمثال فرصة عادل ما إحتمال فوز كل منهم بالمباراة

نفرض أن إحتمال فوز عادل = س

∴ إحتمال فوز عمرو = ٣ س

إحتمال فوز أحمد = ٦ س

∴ س + ٣س + ٦س = ١ صحيح

وهو مجموع الإحتمالات ١٠س = ١

ومنها س = ١,

احتمال فوز أحمد = ٦,

إحتمال فوز عمرو = ٣,

إحتمال فوز عادل = ١,

مثال (٤)

إذا كان إحتمال نجاح حسين = $\frac{٣}{٥}$

واحتمال نجاح على = $\frac{٧}{١٠}$

أرجو الاحتمالات الآتية :-

(١) إحتمال نجاح الأثنين

(٢) إحتمال رسوب الاثنين

(٣) إحتمال نجاح واحد على الأقل

(١) إحتمال نجاح الإثنين = $\frac{٣}{٥} \times \frac{٧}{١٠} = \frac{٢١}{٥٠}$

(٢) إحتمال رسوب الاثنين = $\frac{٢}{٥} \times \frac{٣}{١٠} = \frac{٦}{٥٠}$

(٣) إحتمال نجاح واحد على الأقل

= ١- إحتمال رسوب الاثنين

= ١- $\frac{٦}{٥٠} = \frac{٤٤}{٥٠}$

وهذا الاحتمال الأخير

= احتمال نجاح حسين ورسوب على + احتمال نجاح على ورسوب حسين + احتمال نجاح الاثنين

$= \frac{٣}{٥} \times \frac{٣}{١٠} + \frac{٧}{١٠} \times \frac{٢}{٥} + \frac{٣}{٥} \times \frac{٧}{١٠}$

$\frac{٩}{٥٠} + \frac{١٤}{٥٠} + \frac{٢١}{٥٠} = \frac{٤٤}{٥٠}$

وهذا الاحتمال أيضا =

احتمال حدوث أحد حادثين أوكلاهما

= أحتمال حدوث الأول + احتمال حدوث الثاني − احتمال حدوث الاثنين معا

$= \frac{٣}{٥} + \frac{٧}{١٠} - \frac{٣}{٥} \times \frac{٧}{١٠} = \frac{٤٤}{٥٠}$ وهى نفس النتيجة

مثال (٥) :

ألقيت بزهرتين من زهرات الطاوله وعلمت أن المجموع أقل من ٩ مااحتمال أن يكون المجموع رقما فرديا.

بعرض أن ح (ب) احتمال أن يكون المجموع أقل من ٩

المجموع ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨

عدد الحالات ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦ + ٥ = ٢٦ حاله

ح (ب) = $\frac{٢٦}{٣٦}$

ح (أ ∩ ب) معناه احتمال أن يكون المجموع فرديا وأقل من ٩

المجموع ٣ ٥ ٧

عدد الحالات ٢ + ٤ + ٦ = ١٢ حاله

$ح (أ \cap ب) = \frac{١٢}{٣٦}$

$ح (أ/ب) = \frac{ح (أ \cap ب)}{ح (ب)}$

$= \frac{١٢}{٣٦} \div \frac{٢٦}{٣٦}$

$= \frac{١٢}{٣٦} \times \frac{٣٦}{٢٦} = \frac{١٢}{٢٦} = \frac{٦}{١٣}$

ويمكن الوصول إلى هذا الحل عن طريق فضاء العينة المخفضه - حيث أننا علمنا أن المجموع أقل من ٩ ∴ عدد الحالات = ٢٦ حاله

عدد الحالات التى تحقق الرغبة (عدد حالات المجموع الفردى) = ١٢ حاله

الاحتمال المطلوب = $\frac{١٢}{٢٦} = \frac{٦}{١٣}$ وهى نفس النتيجة التى وصلنا لها سابقا .

مثال (٦)

يوجد بكلية الإدارة ٥٠٠ طالب ٣٠٠ ذكور ، ٢٠٠ إناث عدد الطلبه المصريين ٤٠٠ والإجانب ١٠٠ (٢٠ إناث ، ٨٠ ذكور) فإذا كانت الأحداث كما يلى :

الحدث (أ) مصرى الجنسية ، الحدث (ب) أجنبى

الحدث (جـ) ذكور ، الحدث (د) إناث

أوجد الإحتمالات الآتية :

ح (أ) ، ح (ب) ، ح (حـ) ، ح (د)

ح (حـ / أ) ، ح (أ ∩ ب) ،

، ح (أ∩حـ)

مع إيضاح العلاقات

الحل

ح (أ) إحتمال أن يكون مصريا = $\frac{٤٠٠}{٥٠٠}$ = ٨,

ح (ب) إحتمال أن يكون أجنبيا = $\frac{١٠٠}{٥٠٠}$ = ٢,

وهذان الحدثان متنافران

ح (حـ) إحتمال أن يكون ذكرا ، ح (د) احتمال أن يكون أنثى وهما حدثان متنافران = $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٢}{٥}$ أى ٦, ٤, على الترتيب

ح (حـ / أ) وهو الاحتمال الشرطى بان يكون ذكرا بفرض أنك عرفت أنه مصرى الجنسية

عدد الذكور من المصريين = ٣٠٠ ذكر - ٨٠ ذكر أجنبيا = ٢٢٠

ح (حـ / أ) = $\frac{ح(حـ∩أ)}{ح(أ)}$ =

= $\frac{٢٢٠}{٥٠٠}$ ÷ ٨, = ٥٥,

ويمكن الوصول لنفس النتيجة كما يلى :-

الاحتمال المطلوب هو الأحتمال الشرطى بأن يكون ذكرا بفرض أنك عرفت أنه مصرى

عدد الطلبه من المصرين = ٤٠٠

عدد الذكور من المصريين = ٢٢٠

الاحتمال = $\frac{٢٢٠}{٤٠٠}$ = ٥٥, وهى نفس النتيجة التى وصلنا لها .

ح (أ ∩ ب) = احتمال أن يكون مصريا وأجنبيا = صفر لأن الحدثين متنافران.

ح (أ ∩ ب) وهو إحتمال أن يكون مصريا وذكرا

$= \frac{٢٢٠}{٥٠٠} = \frac{\text{عدد المصريين الذكور}}{\text{أجمالى عدد الطالبه (عدد عناصر الفئة الشاملة)}}$

مثال (٧)

إذا كان إحتمال رسوب الطالب فى الرياضة = ٣٠, وفى المحاسبة ٢٥, وفى المحاسبة والرياضة معا ١٠, إخترنا طالبا بطريقة عشوائية ووجد راسبا فى المحاسبة ما إحتمال أن تكون راسبا فى الرياضة أيضا .

الحل

ح (أ) = إحتمال الرسوب فى الرياضيات = ٣٠,

ح (ب) = إحتمال الرسوب فى المحاسبة = ٢٥,

الاحتمال الشرطى لأن يكون راسبا فى الرياضية بفرض أنه وُجد راسبا فى المحاسبة

$= \text{ح} (\text{أ/ب}) = \frac{\text{ح(أ} \cap \text{ب)}}{\text{ح(ب)}}$

$= \frac{,١٠}{,٢٥} = ,٤$

مثال (٨)

كيس به ٣ كرات حمراء تحمل الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ و ٣ كرات بيضاء تحمل الأرقام ١ ، ٢، ٣ أيضا - سحبنا كرتين بطريقة عشوائية أوجد الاحتمالات الآتية :-

(١) أن تكون أحداهما حمراء و الأخرى بيضاء

(٢) أن تكون إحداهما حمراء والأخرى بيضاء ولكن يحملان نفس الرقم

الحل :

(١) عدد طرق سحب كرتين من ٦ كرات بصفه عامه = ٦ ق$_٢$ = ١٥
ويمثل عدد مفردات الفئة الشامله فئه فضاء ، العينة مقام الاحتمال
عدد طرق سحب كرة حمراء وكره بيضاء = ٣ ق$_١$ × ٣ ق$_١$ = ٩

الاحتمال المطلوب = $\frac{٩}{١٥}$ = $\frac{٣}{٥}$

(٢) يوجد ٣ أزواج من الكرات البيضاء والحمراء وتحمل نفس االرقم

(١) أحمر ، (١) أبيض

(٢) أحمر ، (٢) أبيض

(٣) أحمر (٣) أبيض

عدد طرق سحب زوج من ثلاثه أزواج = ٣ ق$_١$ = ٣

الاحتمال المطلوب = $\frac{٣}{١٥}$ = $\frac{١}{٥}$

مثال (٩)

أحمد ومحمود وعلى من النادى الأهلى وحسين وعمرو ومصطفى من نادى الزمالك يتنافسون على الفوز ببطولة تنس الطاولة فإذا كانت فرصة أحمد ضعف فرصة محمود وثلاثة أمثال فرصة على وتساوى فرصة حسين وثلاثه أمثال فرصة كل من محمود ومصطفى

ما إحتمال فوز لاعب من الأهلى بالبطوله وما إحتمال فوز أحمد بالبطولة واحتمال فوز حسين بالبطلولة .

الحل:

نفرض أن فرصة كل من على ، ومحمود ومصطفى = س

فرصة كل من أحمد وحسين = ٣ س

فرصة محمود = ١,٥ س

إجمالى الفرص = ٣ س + ١,٥ س + س + ٣ س + س + س = ١٠,٥س

١٠,٥ س = ١

س = $\frac{١}{١٠,٥}$

احتمال فوز لاعب من الاهلى بالبطولة = $\frac{٥,٥}{١٠,٥}$ = $\frac{١١}{٢١}$

احتمال فوز أحمد = احتمال فوز حسين

= $\frac{٣}{١٠,٥}$ = $\frac{٦}{٢١}$

احتمال فوز أحمد = $\frac{٦}{٢١}$

احتمال فوز محمد = $\frac{٣}{٢١}$

احتمال فوز على = $\frac{٢}{٢١}$

احتمال فوز أى لاعب من الأهلى = $\frac{١١}{٢١}$

وكذلك من الزمالك

احتمال فوز حسين = $\frac{٦}{٢١}$

احتمال فوز محمود = $\frac{٢}{٢١}$

احتمال مصطفى = $\frac{٢}{٢١}$

احتمال فوز أى لاعب من الزمالك = $\frac{١٠}{٢١}$

مثال (١٠)

إذا كان احتمال الفوز من المرة الواحدة = ٢, ما هو أقل عدد من المرات التى يمكن أن يلعبها ليكون إحتمال الفوز أكبر من ٧٠٪ .

الحل :

احتمال الفوز فى المدة الواحدة = ٢, احتمال الفشل = ٦,

المطلوب ١, ١- (٨,)ن ≥ ٧٠,

ن أى عدد المرات = ٦ ويمكن الحل بالتجربة أو باستخدم اللوغارتمات – (٨,)ن = ≥ ٣, ومنها (٨,)ن ≥ ٣, (تغيرت وجهة المتباينة للضرب فى كمية سالبة) ومنها ن لو ٨,= لو ٣, وبقسمة الطرفين على لو ٨, وهى كمية سالبة نجد أن

ن ≥ $\frac{\text{لو ٣,}}{\text{لو ٨,}}$ ≥ $\frac{٫٥٢٢٩}{٫٠٩٦٩}$ ٥,٣ عدد المرات = ٦

مثال (١١)

ثلاثه صناديق بالصندوق الأول ٢٠ وحده منها ٥ تالفه وبالصندوق الثانى ٣٠ وحده منها ١٠ تالفه وبالثالث ٥٠ وحده منها ٥ تالفه فإذا كانت فرص السحب من هذه الصناديق متكافئه وأننا سحبنا وحدة واحدة بطريقة عشوائية . ما احتمال أن تكون تالفه .

الحل :

احتمال السحب من أى صندوق = $\frac{١}{٣}$

احتمال أن تكون الوحدة تالفه = $\frac{١}{٤}$ من الصندوق الأول ، $\frac{١}{٣}$ من الثانى ، $\frac{١}{١٠}$ من الثالث

الاحتمال المطلوب = $\frac{١}{٣} \times \frac{١}{٤} + \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣} + \frac{١}{٣} \times \frac{١}{١٠}$

$= \frac{٤١}{١٨٠}$

مثال (١٢)

نفرض أننا سحبنا وحده واحدة فى المثال السابق ووجدت تالفه ما احتمال أن تكون من الصندوق الثانى وما احتمال أن تكون الصندوق الثالث .

الحل :

الاحتمال = $\frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣} \div \frac{٤١}{١٨٠}$

$= \frac{٢٠}{٤١}$

احتمال أن تكون من الصندوق الثالث = $\frac{١}{٣} \times \frac{١}{١٠} \div \frac{٤١}{١٨٠}$

$= \frac{٦}{٤١}$ وبديهى من الأول $\frac{١٥}{٤١}$ وتكون مجموع الاحتمالات = واحد صحيح

مثال (١٣)

شركة يعمل بها ١٥ سيدة ، ٣٠ رجل إخترنا ١٠ أشخاص بطريقة عشوائية للسفر للخارج ماإحتمال أن يكون من بينهم سيدتان على الأقل إذا كان ٥ سيدات يرفضن السفر لظروفهن الخاصة .

عدد العاملين = ٣٠ + ١٥ = ٤٥

تستبعد ٥ سيدات ٥

الباقى ٤٠ ١٠ سيدات ، ٣٠ رجل

الاحتمال المطلوب = ١- (احتمال عدم أختيار أى سيده + احتمال أختيار سيدة)

$$1 - \left[\frac{{}^{10}\text{ق}_{\text{صفر}} \times {}^{30}\text{ق}_{10}}{{}^{40}\text{ق}_{10}} + \frac{{}^{10}\text{ق}_{1} \times {}^{30}\text{ق}_{9}}{{}^{40}\text{ق}_{10}} \right]$$

مثال (١٤)

خمس ورقات من أوراق اللعب « الكوتشينه » تحمل الأرقام ١ ، ٢، ٣ ، ٤ ، ٥ سحبنا ورقتين بطريقة عشوائية أوجد إحتمال الحصول على مجموع فردى فى الحالات الآتية :-

أ- حالة سحب الورقتين دفعه واحدة

ب- حالة سحب ورقة تلو الآخرى مع رد الورقة الأولى قبل السحبه الثانية

حـ- حالة سحب ورقة وراء الآخرى دون الرد .

الحل :

(أ) فضاء العينة = ٥ ق $_{٢}$ = ١٠ وهو مقام الاحتمال

الفئة (أ) = { ٢/١ ، ١ /٤ ، ٢/٣ ، ٢/٥ ، ٣/٤ ، ٤/٥ }

عدد العناصر = ٦ والاحتمال = $\frac{٦}{١٠}$

ب- يتحقق المطلوب إذا كان الرقم فى السحبه الأولى فرديا وفى السحبه الثانية زوجيا أو العكس أى فى المرة الأولى زوجيا والثانية فرديا .

فردى فى المرة الأولى = ١ ، ٣ ، ٥ أى ٣ حالات

زوجى فى المرة الثانية = ٢ ، ٤

عدد الحالات = ٣ × ٢ = ٦ حالات

أو زوجى فى المرة الأولى ، فردى فى الثانية

٢ × ٣ = ٦

مجموع الحالات التى تحقق الرغبة ٦ + ٦ = ١٢

فئة فضاء العينة = عدد حالات السحب فى المرة الأولى × عدد حالات السحب فى المرة الثانية

= ٥ × ٥ = ٢٥

الاحتمال = $\frac{١٢}{٢٥}$

حـ - فئة فضاء العينة تتكون من ٢٠ عنصر ٥ × ٤ =٢٠

إذا كان السحبه الأولى عدد فرديا عدد الطرق = ٣ ويكون عدد طرق

سحب رقمًا زوجيا المرة الثانية = ٢ وعدد الطرق = ٣ ×٢ = ٦

إذا تم سحب رقما زوجيا فى المرة الأولى يتم ذلك بعدد من الطرق = ٢

ويتم سحب عدد فردى فى المرة الثانية بعدد ٣ طرق لأن عدد الأوراق الباقية = ٤ ورقات منها ٣ فردى وورقة واحده زوجية

عدد الطرق = ٢ ×٣ = ٦

عدد الطرق الكلية = ٦ + ٦ = ١٢

الاحتمال = $\frac{١٢}{٢٠}$ = $\frac{٦}{١٠}$

الاحمالات ٦, ، ٤٨, ، ٦, على الترتيب

مثال (١٥)

إذا كان احتمال فوز النادى الأهلى فى أى مباراة كرة قدم يلعبها = ٧٠, واحتمال التعادل = ٢٥, وإحتمال الخساره = ٠٥, - فإذا لعب النادى أربع مباريات خلال الشهر أوجد الاحتمالات الاتية :-

(١) أن يفوز ٣ مباريات على الأقل ولا يخسر أى مباراه .

(٢) إن يفوز مرتين ويتعادل مره ويخسر مره

(٣) أن يتعادل مرتين على الأقل .

الحل :

(١) أن يفوز ٣ مباريات على الأقل ولايخسر أية مباراه يتحقق ذلك إذا فاز في المباريات الأربعة إلى يلعبها أو إذا فاز فى ٣ مباريات وتعادل فى مباراة واحدة

أ- إحتمال الفوز فى أربعة مباريات = $(,٧)^{٤}$ = ٢٤٠١ ,

ب- إحتمال الفوز ٣ مرات والتعادل مره = ٤ق $_{٣}$ $(,٧)^{٣}$ $(,٢٥)^{١}$= ٣٤٣ ,

الاحتمال المطلوب = ٢٤٠١ , + ٣٤٣٠ , = ٥٨٣١ ,

(٢) يكسب مرتين ويتعادل مره ويخسر مره

لو كان الاحتمـال هو على سبيل المثال الفوز فى المرتين الأولى والثانية والتعادل فى الثالثة والخسارة فى الرابعة لكان الاحتمال .

$(,٧)^{٢}$ $(,٢٥)^{١}$ $(٠,٥)^{١}$ = ٠٠٦١٢٥ ,

ولكن المطلوب هو الفوز فى أى مرتين والتعادل فى أى مره والخسارة فى أى مرة وهذه الصورة تتكرر ١٢ مره

عدد طرق ترتيب أربعة أشياء منها ٢ متشابهه

[ف ، ف ، ت ، خ]

$= \frac{\lfloor 4}{\lfloor 2} = \frac{4 \times 3 \times 2}{2} = 12$ مرة

الإحتمال = $١٢ \times (٠,٧)^{٢} \times (٠,٢٥)^{١} (٠,٠٥)^{١}$

$٠,٠٠٦١٢٥ \times ١٢ = ٠,٠٧٣٥$

(٣) احتمال أن يتعادل مرتين على الأقل

يتحقق الاحتمال فى الحالات الآتية :-

(١) فى حالة التعادل ٤ مرات

(٢) التعادل ٣ مرات والفوز مره أو التعادل ٣ مرات والخساره مره .

(٣) التعادل مرتين والفوز مرتين أو التعادل مرتين والخسارة مرتين

أو التعادل مرتين مع الفوز مره والخسارة مره

١- التعادل ٤ مرات $(٠,٢٥)^{٤} = ٠,٠٠٣٩٠٦٢$

٢- احتمال التعادل ٣ مرات

= احتمال تعادل ٣ مرات + مرة فوز يحدث بعدد ٤ $ق_{١}$ = ٤ طرق

+ احتمال تعادل ٣ مرات + خسارة مره يحدث بعدد ٤ $ق_{١}$ =٤ طرق

= ٤ (٫٢٥)^{٣} × ٫٧ + ٤ (٫٢٥)^{٣} × ٫٠٥

= ٫٠٤٣٧٥ + ٫٠٠٣١٢٥

= ٫٠٤٦٨٧٥

٣- احتمال التعادل مرتين

التعادل مرتين و الفوز مرتين وعدد الحالات $\frac{ل٤}{ل٢ \times ل٢}$ = ٦ حالات

التعادل مرتين والخسارة مرتين وعدد الحالات = ٦ حالات

التعادل مرتين والفوز مره والخسارة مرة = $\frac{ل٤}{ل٢}$ = ١٢ حاله

= ٦ (٫٢٥)^{٢} (٫٧)^{٢} + ٦ (٫٢٥)^{٢} (٫٠٥)^{٢} + ١٢ (٫٢٥)^{٢}(٫٧) (٫٠٥)

= ٫١٨٣٧٥ + ٫٠٠٠٩٣٧٥ + ٫٠٢٦٢٥ = ٫٢١٠٩٣٧٥

الاحتمال المطلوب = ٫٠٠٣٩٠٦٢ + ٫٠٤٦٨٧٥ + ٫٢١٠٩٣٧٥

= ٠٫٢٦١٧١٨٧

= ٫٢٦٢ لأقرب ثلاثه أرقام عشريه .

حل آخر

يمكن حل التمرين السابق بطريقة الاستبعاد الاحتمال المطلوب

= ١- (إحتمال التعادل صفر مرة + احتمال التعادل مرة واحدة)

إحتمال التعادل صفر مرة

= إحتمال التعادل صفر مرة + الفوز ٤ مرات حالة واحدة

إحتمال التعادل صفر مرة + ٣ مرات فوز + مرة خسارة = ٤ حالات

احتمال التعادل صفر مرة + ٢ فوز + ٢ خسارة = ٦ حالات

احتمال التعادل صفر مرة + الفوز مره + ٣مرات خسارة =٤ حالات

احتمال التعادل صفر مرة + الخسارة ٤ مرات = حالة واحدة

= $(,٧)^{٤}$ + ٤ $(,٧)^{٣}$ $(,٠٥)$ + ٦ $(,٧)^{٢}$ $(,٥)^{٢}$

+ ٤ $(,٧)$ $(,٠٥)^{٣}$ + $(,٠٥)^{٤}$

= ,٢٤٠١+ ,٠٦٨٦ + ,٠٠٧٣٥ + ,٠٠٠٣٥ + ,٠٠٠٠٠٦٢ = ,٣١٦٠٥

إحتمال التعادل مره واحدة

تعادل مره وفوز ٣ مرات وخسارة صفر مرة ٤ حالات

تعادل مره وفوز مرتين وخسارة مرة ١٢ حالة

تعادل مرة وفوز مره وخسارة مرتين ١٢ حالة

تعادل مره وفوز صفر مرة وخسارة ٣ مرات ٤ حالات

مجموع الاحتمالات٤ (,٢٥) (,٧)^{٣}(,٠٥)^{صفر}+١٢(,٢٥)^{١}(,٧)^{٢} (,٠٥)^{١}

+ ١٢ (,٢٥) (,٧) (,٠٥)^{٢} + ٤ (,٢٥) (,٧)^{صفر} (,٠٥) ^{٣}

= ,٣٤٣ + ,٠٧٣٥ + ,٠٠٥٢٥ + ,٠٠٠١٢٥ = ,٤٢١٨٧٥

=,٣١٦٠٥٠ + ,٤٢١٨٧٥ = ,٧٣٨ لأقرب ١٣ أرقام عشريه

الاحتمال المطلوب = ١- ,٧٣٨ = ,٢٦٢ وهى نفس النتيجة السابقة ،

مثال (١٦)

إذا كان احتمال فوز عمرو فى المرة الواحدة = $\frac{١}{٥}$

وإحتمال فوز عادل = $\frac{١}{٨}$ فى المرة الواحدة

فإذا لعب كل منهما مرتين لناديهما فما احتمال الفوز مرة واحدة على الأقل

هنا يفضل الحل بطريقة الاستبعاد

لا يتحقق الاحتمال فى حالة خسارة كل منهما فى المرتين .

إحتمال خسارة عمرو فى المرة الواحدة = $\left(\frac{٤}{٥} \right)$

إحتمال خسارة عمرو فى المرتين = $\left(\frac{٤}{٥} \right)^{٢}$

وكذلك إحتمال خسارة عادل فى المرتين = $\left(\frac{٧}{٨} \right)^{٢}$

الاجمالى المطلوب = $١ - \left(\frac{٤}{٥} \right)^{٢} \times \left(\frac{٧}{٨} \right)^{٢}$

$= ١ - \frac{٧٨٤}{١٦٠٠} = ١ - ,٤٩ = ,٥١$

حل مثال رقم ١٦ بطريقة التجميع

إحتمالات النجاح $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{١}{٨}$ على الترتيب

احتمال النجاح فى المرات الأربع = $\left(\frac{١}{٥}\right)^{٢} \left(\frac{١}{٨} \right)^{٢} = \frac{١}{١٦٠٠}$

إحتمال النجاح ٣ مرات ← (تشمل مرة واحدة من المرات الأربع)

$= \frac{٤}{٥} \times \frac{١}{٥} \times \frac{١}{٨} \times \frac{١}{٨} = \frac{٤}{١٦٠٠}$

$\frac{١}{٥} \times \frac{٤}{٥} \times \frac{١}{٨} \times \frac{١}{٨} = \frac{٤}{١٦٠٠}$

$\frac{١}{٥} \times \frac{١}{٥} \times \frac{٧}{٨} \times \frac{١}{٨} = \frac{٧}{١٦٠٠}$

$\frac{١}{٥} \times \frac{١}{٥} \times \frac{١}{٨} \times \frac{٧}{٨} = \frac{٢٢}{١٦٠٠}$

إحتمال الفوز مرتين : (والفشل مرتين) = ٦ حالات

(١) $\frac{١}{٥} \times \frac{١}{٥} \times \frac{٧}{٨} \times \frac{٧}{٨} = \frac{٤٩}{١٦٠٠}$

(٢) $\frac{١}{٥} \times \frac{٤}{٥} \times \frac{١}{٨} \times \frac{٧}{٨} = \frac{٢٨}{١٦٠٠}$

(٣) $\frac{١}{٥} \times \frac{٤}{٥} \times \frac{٧}{٨} \times \frac{١}{٨} = \frac{٢٨}{١٦٠٠}$

(٤) $\frac{٤}{٥} \times \frac{١}{٥} \times \frac{١}{٨} \times \frac{٧}{٨} = \frac{٢٨}{١٦٠٠}$

(٥) $\frac{٤}{٥} \times \frac{١}{٥} \times \frac{٧}{٨} \times \frac{١}{٨} = \frac{٢٨}{١٦٠٠}$

(٦) $\frac{٤}{٥} \times \frac{٤}{٥} \times \frac{١}{٨} \times \frac{١}{٨} = \frac{١٧٧}{١٦٠٠}$

احتمال الفوز مرة (الفشل ٣ مرات)

$$\frac{١}{٥} \times \frac{٤}{٥} \times \frac{٧}{٨} \times \frac{٧}{٨} + \frac{٤}{٥} \times \frac{١}{٥} \times \frac{٧}{٨} \times \frac{٧}{٨} + \frac{٤}{٥} \times \frac{٤}{٥} \times$$

$$\times \frac{١}{٨} \times \frac{٧}{٨} + \frac{٤}{٥} \times \frac{٤}{٥} \times \frac{٧}{٨} \times \frac{١}{٨} = \frac{٦١٦}{١٦٠٠}$$

الاحتمال = $\frac{١}{١٦٠٠} + \frac{٢٢}{١٦٠٠} + \frac{١٧٧}{١٦٠٠} + \frac{٦١٦}{١٦٠٠} = \frac{٨١٦}{١٦٠٠} = \frac{٥١}{١٠٠}$

وهى نفس النتيجة التى وصلنا لها سابقا

الفصل الثالث

التوزيعات الإحتمالية

الفصل الثالث

التوزيعات الإحتمالية

المتغير العشوائى :

عند إجراء أى تجربة فإن هذه التجربة قد تسفر عن نتائج مختلفة يمكن أن تسمى كل منها متغيرا عشوائيا فعند إلقاء زهرة طاولة فإنه من الممكن الحصول على الأرقام ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦ وعلى ذلك فالمتغير العشوائى الذى يمكن أن نرمز له بالرمز س يمكن أن تأخذ أحد هذه القيم . وعند إلقاء عمله يمكن أن نحصل على صوره أو كتابه والمتغير العشوائى يمكن أن يكون أن صورة أو كتابة وإذا دلت الخبره العملية أن المبيعات اليومية لصاله عرض السيارات يمكن أن تتروا ح بين صفر ، ٧ سيارات فإن المتغير العشوائى يمكن أن يأخذ أحد هذه القيم.

وإذ أردنا أن نستطلع رأى المستهلكين لسلعة معينة عن مستوى هذه السلعه فإن هذا المستوى يمكن أن نعطيه الأرقام التاليه

ممتاز ٦

جيد جدا ٥

جيد ٤

متوسط ٣

ردئ ٢

ردئ جدا ١

والمتغير العشوائى يمكن أن يسفر عن أحد هذه الآرقام والمتغير العشوائى يمكن أن يكون محدوداً بمعنى أن يأخذ عددا من القيم discrete vandam variable ويمكن أن يكون مستمرا بأخذ عدداً لانهائيا من القيم مثل الزمن اللازم لإنهاء خدمة معينه .

جدول التوزيعات الإحتماليه :

إذا قمنا بدراسة عن مبيعات السيارات خلال ١٠٠ يوم وكانت كما يلى :

المبيعات	عدد الايام
صفر	١٠
١	١٥
٢	٢٠
٣	٤٠
٤	١٠
٥	٥
	١٠٠

فإنه من الممكن الوصول إلى متوسط عدد السيارات المباعة فى اليوم كمايلى:-

$\frac{١}{١٠٠}$ (صفر × ١٠ + ١ × ١٥ + ٢ × ٢٠ + ٣ × ٤٠ + ٤ × ١٠ + ٥ × ٥)

$\frac{٢٤٠}{١٠٠}$ = ٢,٤ فى اليوم

كما يمكن أن نحول هذه الخبره العملية إلى جدول توزيع احتمالى والحصول على المتوسط كما يلى :-

المبيعات	عدد الأيام		
س	ك	ح (س)	ح (س) × س
صفر	١٠	,١٠	صفر
١	١٥	,١٥	,١٥
٢	٢٠	,٢٠	,٤٠
٣	٤٠	,٤٠	١,٢٠
٤	١٠	,١٠	,٤٠
٥	٥	,٠٥	,٢٥
	١٠٠	١	٢,٤٠

سَ الوسط الحسابى للتوزيع الاجمالى = مجـ س × ح (س)

ويمكن حساب التباين والأنحراف المعيارى كما يلى :-

حيث التباين = مجـ (س – سَ)^{٢} × ح(س)

المبيعات	عدد الأيام			
س	(س–سَ)	ح (س– سَ)^{٢}	ح (س)	(س–سَ)^{٢}×ح(س)
صفر	٢,٤ –	٥,٧٦	,١٠	,٥٧٦
١	١,٤ –	١,٩٦	,١٥	,٢٩٤
٢	,٤ –	,١٦	,٢٠	,٠٣٢
٣	,٦	,٣٦	,٤٠	,١٤٤
٤	١,٦	٢,٥٦	,١٠	,٢٥٦
٥	٢,٦	٦,٧٦	,٠٥	,٣٣٨
				١,٦٤٠

المتباين = ١,٦٤

الانحراف المعيارى = الجذر التربيعى للتربيعى للتباين= ١,٢٨

أنواع التوزيعات الإحتمالية

سبق أن أو ضحنا أن المتغير العشوائى ما هو إلى الوصف الرقمى للنتائج التى يمكن أن تسفر عنها أى تجربة سواء كانت تجربه بسيطة مثل ألقاء زهرة طاولة (الحصول على أحد الأرقام من ١ إلى ٦) أو القاء قطعة نقود (الحصول على صوره أو كتابه) وحتى هذه التجربة البسيطة يمكن تحويلها إلى أرقام بأن نفرض أن الصورة تأخذ رقم ١ والكتابه رقم ٢ - وهذا المتغير العشوائى قد يكون discrete منفصلاً إذا كان يأخذ رقما محدداً أو قابلا للعد أو قد يكون Cantinuais إذا كان من الممكن أن يأخذ قيمة غير محدده مثل الاوزان ودرجات الحرارة وغيرها وعلى هذا فإن التوزيعات الإحتمالية يمكن أيضا أن تنقسم إلى قسمين :-

(١) توزيعات إحتمالية منفصله Discrete Probability distributian

(٢) توزيعات احتمالية متصله Continuaus probitity distributian

أولا : التوزيعات الاحتمالية المنفصله

(١) توزيع بواسون The Poisson distribution وينسب هذا التوزيع إلى العالم سيمون دنيس بواسون (١٧٨١- ١٨٤٠) وحتى يمكن فهم هذا التوزيع علينا أن نتذكر أن المتغيرالعشوائى المنفصل هو الأساس لهذا التوزيع إذ أن الأمر يتعلق هنا بعدد مرات وقوع حدث معين خلال فترة زمنية معينه - ما عدد السيارات التى يمكن أن يبيعها المعرض فى اليوم الواحد - ما عدد المكالمات التى تصل إلى مكتب عميد الكلية كل ٥ دقائق - ما عدد الطائرات التى تصل مطار القاهرة كل ١٠ دقائق وكل هذه

الامور – المتغيرات العشوائية – يمكن أن تاخذ الأرقام صفر ، ١ ، ٢، ٣، ٤ ، ٥ الخ .

أى أن س يمكن أن تأخذ إحدى هذه القيم المحدده ويمكن الحصول على إحتمال أخذ المتغير العشوائى إحدى هذه القيم طبقا لتوزيع بواسون

$$ح(س) = \frac{\lambda^{س} \times هـ^{-\lambda}}{س!}$$

حيث λ = متوسط عدد مرات وقوع الحدث فى خلال فترة زمنية معينة

هـ = ٢,٧١٨٢٨ أساس اللوغارتيمات الطبيعيه « نابريانيه »

ح (س) هو إحتمال حدوث المتغير العشوائى س

، س يمكن أن تأخذ أى قيمه من القيم المشار إليها سابقا .

وقد أمكن إعداد جداول لإحتمالات بواسون حيث λ تمثل متوسط عدد مرات وقوع الحدث خلال فترة من الزمن – والجدول رقم (١) يبين إحتمالات المتغير العشوائى س لمتوسطات تتراوح بين ١و ، ٢٠ وجدير بالذكر أن بعض المراجع تعبر عن المتوسط بالرمز μ بدلا من λ

فى هذه الحالة نجد أن

$$ح(س) = \frac{\mu^{س} \times هـ^{-\mu}}{س!}$$

وسنعمل على إيضاح استخدامات توزيع بواسون الاحتمالى بعدد من الأمثله المحلوله ثم نتبعها ببعض التمرينات .

مثال (١)

إذا كان متوسط عدد الزبائن الذين يدخلون أحد المحلات التجاريه = ٣ زبائن كل ٥ دقائق أوجد الإحتمالات الآتية :-

(١) دخول زبون واحد خلال ٥ دقائق

(٢) وصول زبونين خلال ٥ دقائق

(٣) دخول ٣ زبائن خلال ٥ دقائق على الأقل

إحتمال دخول زبون واحد : من القانون ح (س) = $\frac{م^{س} \times هـ^{-م}}{\underline{|س}}$

ح (١) = $\frac{٣^{١} \times ٢,٧١٨^{-٣}}{\underline{|١}}$

= $\frac{٣}{(٢,٧١٨)^{٣}}$ = ,١٤٩٤

ويمكن الحصول على هذه القيمة من الجدول مباشرة وذلك تحت المتغير العشوائى س = ١ والمتوسط ٣ نجد الرقم ١٤٩٤, . وهى نفس النتيجة التى وصلنا لها .

وكذلك من الجدول نجد ح (٢) = ,٢٢٤٠

وهى تساوى أيضا من القانون $\frac{٣^{٢} \times ٢,٧١٨^{-٣}}{\underline{|٢}}$

وعلى ذلك سنستخدم الجداول باستمرار فى حل التمارين ما لم يطلب خلاف ذلك .

احتمال دخول ٣ زبائن على الأقل

= ١-(احتمال عدم دخول أى زبون + دخول زبون واحد + دخول زبونين)

= ١- (,٠٤٩٨ + ,١٤٩٤ + ,٢٢٤٠)

= ١- (,٤٢٣٢)

= ,٥٧٦٨

مثال (٢) :

إذا كان احتمال رسوب طالب فى الامتحان = ١٠٪ من واقع خبرة الماضى ما إحتمال رسوب ١٥ طالب من بين ١٥٠ طالب بكلية الإدارة ودخلوا الامتحان .

الحل :

متوسط عدد حالات الرسوب من واقع خبرة الماضى

م = $\frac{١٠}{١٠٠}$ × ١٥٠ = ١٥ .

المطلوب ح (١٢) = ,٠٨٢٩

مثال (٣)

إذا كان عدد المراكب التى دخلت ميناء الاسكندرية العام الماضى = ١٤٦٠ مركبا ما إحتمال .

(١) وصول ٣ مراكب فى يوم معين من العام الحالى .

(٢) وصول ٣ مراكب على الأكثر فى يوم معين .

(٣) وصول ٣ مراكب على الأقل .

فى هذه الحالة متوسط عدد المراكب التى تصل يوميا

= ١٤٦٠ ÷ ٣٦٥ = ٤

أى أن م = ٤

(١) ح (٣) ــــــ> من الجدول = ١٩٥٤,

(٢) إحتمال وصول ٣ مراكب على الأكثر

= ح (صفر) + ح (١) + ح (٢) + ح (٣) من الجدول

= ٠١٨٣, + ٠٧٣٣, + ١٤٦٥, + ١٩٥٤, = ٤٣٣٥,

(٣) إحتمال وصول٣ مراكب على الأقل

١- [(ح (صفر) + ح(١) + ح(٢)]

١- (٠١٨٣, + ٠٧٣٣, + ١٤٦٥,]

= ١- ٢٣٨١,

= ٧٦١٩,

مثال (٤)

إذا كان متوسط عدد الطائرات التى تصل مطار القاهرة خلال ساعتين = ١٢ طائرة ما إحتمال وصول ٤ طائرات خلال الساعة .

متوسط عدد الطائرات التى تصل كل ساعه = ٦ طائرات

ح (٤) على أساس أن المتوسط م = ٦ من الجدول = ١٣٣٩,

تمارين على توزيع بواسون

(١) إذا كـان مـتـوسط عـدد المكالمات التى تصل إلى سـويتش الكليـة = ٨ مكالمات فى الساعة ما احتمال وصول ٣ مكالمات فى الساعه على الأقل ، ٣ فقط ، ٣ على الأكثر .

(٢) إذا كـان مـتـوسط عدد المبـيعـات من السـيارات لأحـد المعـارض = ٣ سيارات فى اليوم ما إحتمـال أن يبيـع ٥ سـيارات على الأكثر فى أحد الأيام .

(٣) إذا كان إحتمال رسوب الطالب فى ماده الأحصاء = ٥٪ من واقع خبرة الماضى – مـا إحتـمـال رسـوب ١٠ طلاب على الأكثـر من بين ١٤٠ طالب دخلوا الامتحان .

(٤) إذا كان متوسط عدد حوادث السيارات التى تقع يوميا فى أحد المدن = ٣ حوادث يوميا ، ما إحتمال عدم وقوع أى حادث فى يوم معين .

التوزيع ثنائى الحدين

Binomial Distribution

ويعتبر من التوزيعات الإحتمالية المنفصله ولهذا فإن هذا التوزيع الإحتمالى يقوم على أساس إفتراض إجراء تجربة معينه عدة مرات وإحتمال النجاح فى أى مره يكون ثابتا والتوزيع الاحتمالى يعطينا إحتمال النجاح صفر مره ، مره واحده ، مرتين الخ . إحتمال النجاح ر من المرات من بين ن من المرات (عدد مرات إجراء التجربه) .

وهذا الاحتمال = $^{ن}ق_{ر}\ ح^{ر}\ (١-ح)^{ن-ر}$

حيث ح إحتمال النجاح فى المرة الواحدة ، ر عدد حالات النجاح المطلوبه ، ن عدد مرات إجراء التجربة ، (١-ح) = ل أيضا إحتمال الفشل فى المرة الواحدة.

وينسب هـــذا التوزيع إلـى العالـم الرياضـى اكسريسرى برتوللى Bernoulli Process - وتقوم هذه العملية على الأسس الآتية :-

١- اجراء التجربة عدد من المرات مقداره ن

٢- فى كل مره تجرى فيها التجربة يوجد إحتمال نجاح = ح واحتمال فشل ل = ١-ح وهو إحتمال ثابت من تجربة لأخرى .

٣- كل تجربة من التجارب تعتبر مستقله عن التجربة الأخرى .

مثال (أ)

تعرض أن التجربة هى إلقاء قطعة من النقود ٣ مرات - احتمال النجاح فى كل مرة وهو الحصول على صورة = $\frac{١}{٢}$ وإحتمال الفشل = $\frac{١}{٢}$ وعند إجراء التجربة ٣ مرات فإن المتغير العشوائى س (عدد مرات نجاح التجربة) = صفر ، ١ ، ٢، ٣ وينطبق القانون $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\ \text{ح}^{\text{ر}}\ \text{ل}^{\text{ن-ر}}$

$$^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{صفر}}\text{ح}^{\text{صفر}}\text{ل}^{٣} = {}^{٣}\text{ق}_{\text{صفر}}\left(\frac{١}{٢}\right)^{\text{صفر}}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٣} = \frac{١}{٨}$$

$$^{\text{ن}}\text{ق}_{١}\text{ح}^{١}\text{ل}^{٢} = {}^{٣}\text{ق}_{١}\left(\frac{١}{٢}\right)^{١}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} = \frac{٣}{٨}$$

$$^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}\text{ح}^{٢}\text{ل}^{١} = {}^{٣}\text{ق}_{٢}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}\left(\frac{١}{٢}\right)^{١} = \frac{٣}{٨}$$

$$^{\text{ن}}\text{ق}_{٣}\text{ح}^{٣}\text{ل}^{\text{صفر}} = {}^{٣}\text{ق}_{٣}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٣}\left(\frac{١}{٢}\right)^{\text{صفر}} = \frac{١}{٨}$$

$$= ١$$

ويكون التوزيع الإحتمالى كما يلى :

س	ح (س)	
صفر	$\frac{١}{٨}$	= ,١٢٥
١	$\frac{٣}{٨}$	= ,٣٧٥
٢	$\frac{٣}{٨}$	= ,٣٧٥
٣	$\frac{١}{٨}$	= ,١٢٥
	١	١,-

مثال (٢)

عند القاء زهرة طاوله ٤ مرات المطلوب الحصول على رقم ٥ إحتمال النجاح ح = $\frac{١}{٦}$ وإحتمال الفشل ل = $\frac{٥}{٦}$ فإن التوزيع الاحتمال يكون كما يلى :-

س	ح (س)		
صفر	$^{٤}ق_{صفر}$ $(\frac{١}{٦})^{صفر}$ $(\frac{٥}{٦})^{٤}$	= ٦٢٥/١٢٩٦	= ,٤٨٢٣
١	$^{٤}ق_{١}$ $(\frac{١}{٦})^{١}$ $(\frac{٥}{٦})^{٣}$	= ٥٠٠ / ١٢٩٦	= ,٣٨٥٨
٢	$^{٤}ق_{٢}$ $(\frac{١}{٦})^{٢}$ $(\frac{٥}{٦})^{٢}$	= ١٥٠/ ١٢٩٦	= ,١١٥٧
٣	$^{٤}ق_{٣}$ $(\frac{١}{٦})^{٣}$ $(\frac{٥}{٦})^{١}$	= ٢٠/ ١٢٩٦	= ,٠١٥٤
٤	$^{٤}ق_{٤}$ $(\frac{١}{٦})^{٤}$ $(\frac{٥}{٦})^{صفر}$	= ١/ ١٢٩٦	= ٠,٠٠٠٨
			١

وقد أمكن إعداد جداول لحساب توزيع ثنائى الحدين كما هو موضح بالجدول رقم ٢ حيث n تمثل عدد مرات إجراء التجربة ، × المتغير العشوائى أى عدد مرات النجاح المطلوبه - وكذلك إحتمالات النجاح إعتباراً من ٠٥, لغاية ٥٠, ويمكن الحصول على قيم المثال الأول من الجدول رقم (٢)

فى المثال الأول إحتمال النجاح فى أى مرة = ٥, وعدد مرات إجراء التجربة٤ وبالكشف فى الجدول أمام ن = ٣ وتحت إحتمال ٥, ونجد

ح (صفر) = ,١٢٥٠

ح (١) = ,٣٧٥٠

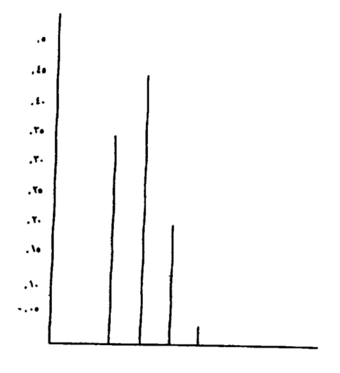
ح (٢) = ,٣٧٥٠

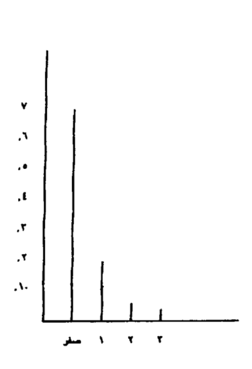
ح (٣) = ,١٢٥٠

وأما بالنسبة للمثال الثانى فإحتمال النجاح $\frac{١}{٦}$ غير موجود بالجدول (١٦٦٧,) لأن الموجود إحتمال نجاح ١٥, ، ٢٠, ويمكن تمثل توزيع ثنائى فى الحدين بيانيا كما يتضح من رسم المثال الأول .



ويلاحظ من رسم هذا المثال أنه متماثل ومنتظم تماما - عددمرات إجراء التجربة ٣ مرات وإحتمال النجاح فى المرة الواحدة = ٥, والآن نرسم هذا التوزيع ثنائى الحدين بفرض أن إحتمال النجاح فى المرة الواحدة = ٢, وكذلك أو لنرى إتجاه الرسم .





ويلاحظ من الرسوم السابقة أنه كلما أنخفض إحتمال النجاح فى المرة الواحدة كلما كان المنحنى ملتويا وهو ملتوى إلى جهة اليمين .

وبديهى لو إرتفع إحتمال النجاح فى المرة الواحدة فإن المنحنى يفقد أيضا التماثل ويميل إلى الإلتواء جهة اليسار .

توزيع بواسون كتقريب للتوزيع ثنائى الحدين

فى كثير من الأحيان قد لانجد الجداول اللازمة لحساب الاحتمالات المختلفة للتوزيع ثنائى الحدين ولهذا قد تلجا إلى توزيع بواسون كتقريب للتوزيع ثنائى الحدين ولكن بشرط .

(١) أن يكون ح $\leq$ ٠٥,٠

(٢) أن يكون ن $\leq$ ٢٠

وفى هذه الحالة سنستخدم توزيع بواسون بفرض أن المتوسط = ن × ح وسنقوم بحساب القيم الخاصة بتوزيع ثنائى الحدين وتوزيع بواسون مع فرض أن ن = ٢٠ وأن ح = ٠١,٠

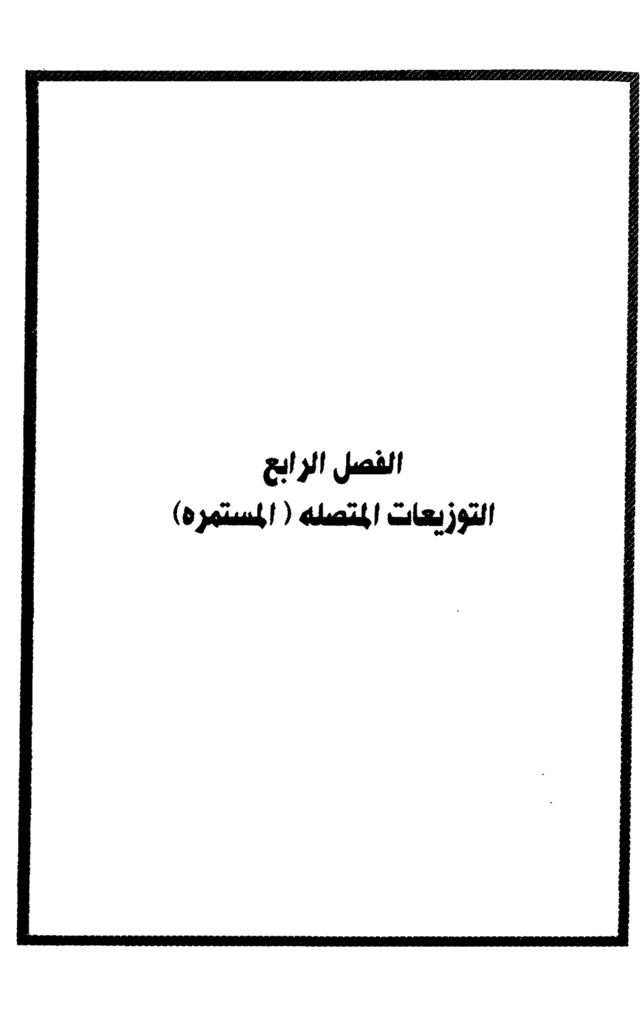
وفى هذه الحاله يستخدم توزيع بواسون بفرض أن

. م أو λ = ٠١,٠ × ٢٠ = ٢٠,٠

وسنوضح الفرق فى حدود أربعة أرقام عشرية .

المتغير العشوائى	الاحتمال (ثنائى الحدين)	(الاحتمال بواسون)	الفرق
صفر	,٨١٧٩	,٨١٨٧	,٠٠٠٨
١	,١٦٥٢	,١٦٣٧	,٠٠١٥
٢	,٠١٥٩	,٠١٦٤	,٠٠٠٥
٣	,٠٠١٠	,٠٠١١	,٠٠٠١

مما سبق يتضح وجود فروق ضئيلة جداً تجعلنا نثق فى هذا التقريب



الفصل الرابع

التوزيعات المتصله (المستمره)

التوزيعات المتصله (المستمره)

التوزيع العادى

Normal Distribution

- اهمية التوزيع العادى :

يعتبر التوزيع الإحتمالى العادى Normal probility, distribution هو أهم التوزيعات الاحتماليه التى يمكن إستخدامها لو صف المتغير العشوائى المستمر .. بل يرى الكثير من رجال الأحصاء أن هذا التوزيع يعتبر حجر الزواية فى النظرية الأحصائية الحديثه وترجع الأهمية القصوى لهذا التوزيع إلى أنه وجد مناسبا لوصف الكثير من الظواهر من بينها الخصائص المتعلقه بوصف الانسان نفسه من حيث التوزيعات التكراريه للأوزان والأطوال وكذلك الأختبارات الخاصه بمستوى الذكاء وإذا تركنا الجوانب الإنسانية ونظرنا لبعض الظواهر الآخرى مثل الأعمار الخاصة بالمصابيح الكهربائية أو بطاريات السيارات أو غيرها - أو توزيع درجات الطلاب لو جدناه يصلح لوصفها ولعل من أهم خواص التوزيع العادى أنه يمكن استخدامه بنجاح كتقريب للكثير من التوزيعات الاحتماليه مثل التوزيع ثنائى الحدين وتوزيع بواسون وغيرها مع ملاحظة أن التوزيع ثنائى الحدين أو توزيع بواسون من التوزيعات المنفصلة أى التى تتصل بالاشياء التى يمكن عدها فى حين التوزيع العادى من التوزيعات المستمره التى يمكن قياسها والتوزيعات المنفصله تأخذ قيمامحدوده ومعدوده فى حين أن التوزيعات المستمرة يمكن أن تأخذ أى قيمة ونظرا لآن هذا التوزيع العادى من التوزيعات التى تصف المتغيرات العشوائية التى يمكن أن تأخذ أى قيمة فإننا لا نقوم عاده بحساب إحتمال كل قيمة من هذه القيم اللانهائية ولهذا فاننا نعدم عادة بحساب إحتمال أن تكون القيمة فى حدود معينه

فنقول مثلا إحتمال أن يكون وزن الشخص بين ٧٥ ، ٨٠ كيلو = ٣, ولا يمكن أن نقوم بحساب الاحتمال لكل وزن من الأوزان على حده لأن هذه الأوزان يمكن أن تأخذ ملايين القيم . والامر هنا يختلف مثلا عن توزيع ثنائى الحدين أو توزيع بواسون فنقول مثلا إحتمال وصول ٥ طائرات للمطار خلال ساعه = ٤٠, .

- الأصل التاريخى

ويرجع الفضل الأساسى إلى ظهور هذا التوزيع الإحتمالى وإلى تطوره إلى علماء القرن الثامن عشر أمثال كارل جوس Karl Gauss

- والذى كثيرا ما يسمى هذا التوزيع بأسمه تكريما له وغيره من العلماء أمثال بيير لابلاس Pierre Laplace وإبراهام مواثرAbraham de Moirre

- خصائص المنحنى العادى أو كما يسمى فى بعض الأحيان الطبيعى .

(١) المنحنى العادى له شكل الناقوس bell Shape

وله قمة واحدة Single peak

(٢) المنحنى متماثل تماما حول محور رأسى يصل بين قمة المنحنى ويقطع المحور الأفقى عند نقطة تمثل قيمة الوسط الحسابى والوسيط والمنوال لتساوى قيم هذه المتوسطات عند هذه النقطة وحيث أن هذا المحور هو محور التماثل ويصل القمه بقيمة المتوسطات على المحور الأفقى فإن هذا يعنى أن أكبر تكرار يكون عند القمه وهو الذى يقابل قيم المتوسطات - وتقل هذه المتكرارات تدريجيا كلما إتجهنا إلى اليمين - زيادة القيم عن المتوسط أو أتجهنا إلى اليسار نقص القيم عن المتوسط وكلما إبتعدنا أكثر وأكثر عن المتوسط كلما قلت التكرارات ولهذا نقول أن للمنحنى العادى طرفان « ذيلان » طويلان يمتدان ذات اليمن ذات اليسار

لمسافات طويله وتقريان من المحور الأفقى دون أن يمساه .

The twa tails extend in difinitely and never touch the horizontal axis

(٣) رغم أنه من المفروض نظريا أن طرفى المنحنى يمتدان يمينا ويساراً إلى مالانهاية دون أن يمسا المحور الأفقى ، إلا أننا نهتم من الناحية العملية بالقيم التى تزيد أو تنقص عن الوسط الحسابى بمقدار ٣ وحدات معياريه حيث أن المساحة الكلية تحت المنحنى = ١ (مجموع الاحتمالات) - النصف عن اليمن والنصف على اليسار - فإذا رمزنا للوسط الحسابى بالرمز م وللانحراف المعيارى بالرمز σ فإن المساحة بين

. م ± ١ σ = ,٦٨٢٦

. م ± ٢ σ = ,٩٥٤٤

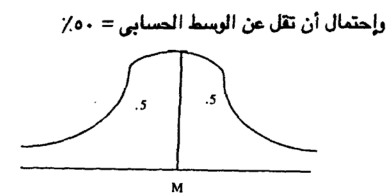
. م ± ٣ σ = ,٩٩٧٣

تفسير ذلك أن ٦٨,٢ ٪ من قيم المفردات لاتزيد أو تنقص عن الوسط الحسابى إلا بوحدة معياريه فقط أى أن ٣٤,١ ٪ من القيم تزيد عن الوسط الحسابى بمقدار وحده معياريه واحده ، ٣٤,١ ٪ من القيم تنقصى عن الوسط الحسابى بمقدار وحده معياريه واحده .

وبالمثل ٩٥,٤ ٪ من قيم المفردات لاتختلف عن الوسط الحسابى إلا فى حدود وحدتين معياريتين فقط وكذلك ٩٩,٧ ٪ من قيم المفردات تزيد أو تنقص عن الوسط الحسابى بمقدار ٣ وحدات معياريه فقط ولذلك كان الاهتمام العملى قاصرا على هذه الحدود .

وعلى ذلك إحتمال أن تزيد قيمة المتغير عن الوسط الحسابى = ٥٠٪

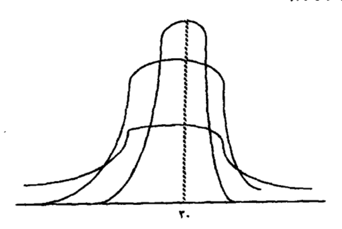
واحتمال أن تقل عن الوسط الحسابى = ٥٠٪



وفى حالة تعادل الوسط الحسابى فإن شكل المنحنى العادى يختلف حسب الأنحراف المعيارى فكلما زاد الانحراف المعيارى كلما زاد تفرطح المنحى كما يتضح من الأشكال الآتية :

. م = ٣٠

. σ = ٢ ، ٤ ، ٨



تعريف Z

ويمكن أن تعرف Z بأنها تمثل الفرق بين قيمة أى متغير س والوسط الحسابى م بدلاله الوحدات المعيارية

فمثلا لو كان متوسط وزن الطالب = ٧٠ كيلو بانحراف معيارى ٥ كيلو وكان وزن أحد الطلاب = ٨٠ كيلو فإن الفرق بين وزن الطالب والمتوسط

س – م

= ٨٠ كيلو – ٧٠ كيلو = ١٠ كيلو بالوحدات المطلقة أى بالكيلو جرام وأما الفرق بدلا له الوحدات المعياريه

$$Z = \frac{\text{س} - \text{م}}{\text{ه}}$$

$$= \frac{٨٠ - ٧٠}{٥}$$

= ٢ وحده معياريه

وتوجد جداول لحساب الإحتمالات عند قيم Z المختلفة فمثلا تحت Z = ١ نجد أن الاحتمال = ٣٤١٣, وهذا يعنى أنه إحتمال أن تكون قيمة المتغير بين الوسط الحسابى وبين الوسط الحسابى مضافا له وحده معياريه واحدة = ٣٤١٣, وهكذا – وبهذا يمكن الحصول على الإحتمالات المختلفة .

وعلى ذلك يمكن أن تتصور أن الوسط الحسابى ينحرف عن نفسه بالقيمة صفر من الواحدات المعيارية فإذا أردنا أن نعرف مثلا إحتمال أن تتراوح قيمة المتغير بين الوسط الحسابى والوسط الحسابى مضافًا إليه ١,٥ وحده معياريه فإن هذا الأحتمال = ٤٣٣٢,٠ وبهذا يمكن إستخدام الجداول لقياس الإحتمالات المختلفة كما يتضح من الأمثله الآتية :-

مثال (١)

فى دراسة عن محو الأميه فى مصر تبين أن عدد الساعات اللازمه لذلك يخضع للتوزيع العادى وأن الوسط الحسابى لعدد الساعات اللازمه = ٦٠٠ ساعه وبأنحراف معيارى قدره ١٠٠ ساعه أوجد الاحتمالات الآتية :-

أ- ما إحتمال أن شخصا تم إختياره بطريقة عشوائية يحتاج إلى أكثر من ٦٠٠ ساعه لمحو أميته .

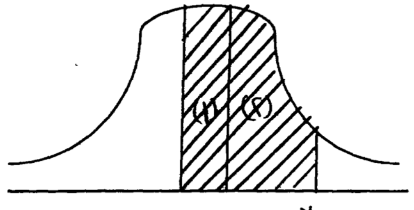
ب- ما إحتمال أن يحتاج هذا الشخص إلى مدة تتراوح بين ٥٥٠ ، ٧٠٠ ساعه لمحو أميته .

جـ- ما إحتمال أن يحتاج هذا الشخص إلى ٥٠٠ ساعه على الأقل لمحو أميته .

د- ما إحتمال إحتياجه إلى ٤٠٠ ساعه على الأكثر لمحو أميته .

أ- الإحتمال المطلوب = ٥,

ب- إحتمال إحتياج الشخص إلى مدة تتراوح بين ٥٥٠ ساعه ، ٧٠٠ ساعه



الفرق بين ٥٥٠ ، ٦٠٠ = ٥٠ ساعه

عدد الوحدات المعياريه $\frac{٥٠}{١٠٠}$ = ٥,

عندما Z = ٥, يكون الإحتمال رقم (١)

,١٩١٥

الفرق ٧٠٠ - ٦٠٠ = ١٠٠ ساعه

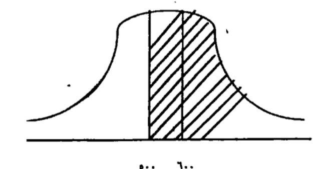
Z (عدد الوحدات المعيارية = $\frac{١٠٠}{١٠٠}$ = ١)

الاحتمال رقم (٢) = ٣٤١٣,

الاحتمال المطلوب = ١٩١٥, + ٣٤١٣,

= ٥٣٢٨,

(جـ) إحتمال ٥٠٠ ساعه على الأقل



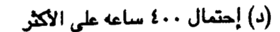
من ٥٠٠ ، ٦٠٠ ←── مع اهمال الإشارة

= ١٠٠ ساعه

Z. = ١٠٠ ÷ ١٠٠ = ١

ح (١) = ٣٤١٣,   ح (٢) = $\frac{١}{٢}$

الاحتمال المطلوب = ٣٤١٣, + ٥, = ٨٤١٣,



(د) إحتمال ٤٠٠ ساعه على الأكثر

إحتمال ٦٠٠ على الأكثر = ٥,

الفرق بين ٦٠٠ ، ٤٠٠ = ٢٠٠ ساعه

Z. = $\frac{٢٠٠}{١٠٠}$ = ٢

ح (من ٤٠٠ ساعه إلى ٦٠٠ ساعه)

= ٤٧٧٢,

الاحتمال المطلوب = ٥, − ٤٧٧٢,

= ٠٢٢٨,

مثال (٢)

إذا كان متوسط عدد المشاهدين لمباريات النادى الأهلى = ٥٠٠٠٠ مشاهد بأنحراف معيارى = ١٥٠٠٠

ما إحتمال :

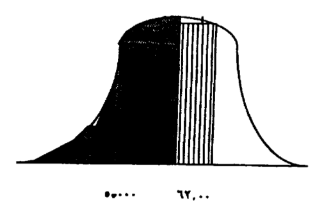
(١) أن يقل عدد المشاهدين عن ٦٢٠٠٠ .

(٢) ألا يقل عدد المشاهدين عن ٧٠٠٠٠

(٣) أن يتراوح عدد المشاهدين بين ٤٠٠٠٠ ، ٧٠٠٠٠

الحل :

(١) إحتمال أن يقل عدد المشاهدين عن ٦٢٠٠٠



الاحتمال المطلوب = ٥, (احتمال أن يقل عدد المشاهدين عن ٥٠٠٠٠)

+ إحتمال أن يتراوح عدد المشاهدين بين ٥٠٠٠٠ ، ٦٢٠٠٠

الفرق بالوحدات المطلقة = س - م = ٦٢٠٠٠ - ٥٠٠٠٠

= ١٢٠٠٠ مشاهد

قيمة Z (الانحراف بالوحدات المعيارية) = $\frac{١٢٠٠٠}{١٥٠٠٠}$ = ,٨

الاحتمال من الجدول = ٢٨٨١,

الاحتمال المطلوب = ٢٨٨١, + ٥, = ٧٨٨١,

(٢) إحتمال ألا يقل عدد المشاهدين عن ٧٠٠٠٠ معناه أحتمال أن يكون عدد المشاهدين ٧٠ ألف فاكثر

= ٥, – احتمال أن يتراوح عدد المشاهدين بين ٥٠٠٠٠ ، ٧٠٠٠٠

الفرق بالارقام المطلقة = ٧٠٠٠٠ – ٥٠٠٠٠ = ٢٠٠٠٠

$$Z = \frac{٢٠٠٠٠}{١٥٠٠٠} = ١,٣٣$$

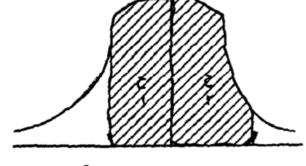
ح (من الجدول) = ٤٠٨٢,

وهو إحتمال أن يتراوح عدد المشاهدين بين ٥٠٠٠٠ ، ٧٠٠٠٠

الاحتمال المطلوب = ٥, – ٤٠٨٢, = ٠٩١٨,

إحتمال أن يتراوح عدد المشاهدين بين ٤٠٠٠٠ ، ٧٠٠٠٠

وهذا الاحتمال يتكون من ح ١ ، ح ٢



للحصول على ح١ الفرق بالارقام المطلقة = ٤٠٠٠٠ – ٥٠٠٠٠ = ١٠٠٠٠ مع إهمال الاشاره

$$Z = \frac{١٠٠٠٠}{١٥٠٠٠} = ٦٧,$$

ح١ ←——— من الجدول ٫٢٤٨٦

للحصول على ح٢ $Z = \frac{٧٠٠٠٠ - ٥٠٠٠٠}{١٥٠٠٠} = \frac{٢٠٠٠٠}{١٥٠٠٠}$ مشاهد

= ١٫٣٣ ، ح٢ = ٫٤٠٨٢

الاحتمال المطلوب = ح١ + ح٢

= ٫٢٤٨٦ + ٫٤٠٨٢ = ٫٦٥٦٨

تطبيق عملى :

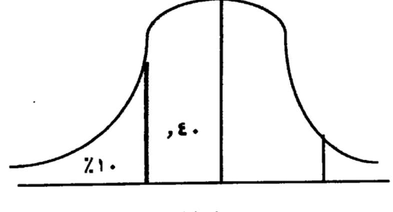
يمكن إستخدام التوزيع المعيارى العادى" Standard Normal Distri bution"

فى إيجاد الحلول للمشاكل العملية خصوصاً تلك المتعلقة باعطاء الضمانات عن عدد ساعات تشغيل المصابيح الكهربائية أو عدد كيلومترات تشغيل إطار السيارات أو المدد اللازمه للضمان للسلع المختلفة وسنوضح ذلك الأمر بمثال عملى:

بفرض أن إحدى الشركات تنتج نوعا معيناً من المصابيح وأن الوسط الحسابى للعمر الافتراضى = ٩٠٠ ساعه بانحراف معيارى قدره ٦٠ ساعه وإذا أفترضنا أن الشركة ترد للمشترى نصف ثمن المصباح إذا قل العمر الافتراضى للتشغيل عن عدد معين من الساعات س فإذا أرادت الشركة أن يتحمل ما قيمته ٥٪ من قيمة المبيعات ما هو عدد الساعات س الذى نضعه فى الضمان لأقرب رقم صحيح لصالح الشركة .

حيث أن الشركة ترد نصف قيمة المصباح وأنها ترغب فى تحمل ما قيمته ٥٪ من قيمة المبيعات ، فإن الشركة تكون على إستعداد لرد نصف قيمة المصباح وذلك لما يعادل ١٠٪ من المبيعات . وكان المطلوب هنا هو الإجابه عن السؤال الآتى:

إذا كان احتمال أن يكون عدد ساعات التشغيل (العمر الافتراض) أقل من س = ١٠٪ ما هى قيمة س



إحتمال أن يتراوح العمر الافتراضى بين س ، ٩٠٠ ساعه = ٤, قيمة Z من الجدول التى تعطى إحتمالا = ٤,

= تقريبا ١,٢٨

لأنه عند Z = ١,٢٨ يكون الإحتمال ٣٩٩٧, = ٤, وتقريبًا، الفرق بين ٩٠٠ ساعه ، س ساعه بدلاله الوحدات المعياريه = ١,٢٨ وحيث أن الأنحراف المعيارى = ٦٠ ساعه

الفرق بالساعات = ٦٠ ساعه × ١,٢٨ وحده انحراف معيارى

= ٧٦,٨ ساعه

س = ٩٠٠ – ٧٦,٨ = ٨٢٣,٢ ساعه

= ٨٢٣ ساعه لأقرب رقم صحيح لصالح الشركه .

مثال :

إذا كان متوسط العمر الأفتراضى لنوع معين من أنواع إطارات السيارات الذى تنتجه إحدى الشركات = ٣٥٠٠٠ كيلو متر وبأنحراف معيارى ٥٠٠٠ كيلو متر – وإذا كانت الشركة ترد $\frac{١}{٣}$ ثمن بيع الإطار لكل من يقل العمر الإفتراضى للإطار الذى يشتريه عن عدد معين من الكيلو مترات – أوجد العدد الواجب تحديده فى هذا الضمان إذا أرادت الشركة أن تتحمل من أجل ذلك خصماً يوازى ٥٪ من المبيعات .

الحل :

حيث أن الشركة ترد $\frac{١}{٣}$ ثمن بيع الإطار فقط وحيث أن جملة ما تتحملة = ٥٪ من قيمة المبيعات .

∴ من المفروض من أن ترد الشركة لهذه القيمة ما يوازى ١٥٪ من حجم المبيعات .

يفرض أن عدد الكيلو مترات المطلوب وضعه فى ضمان بيع الإطار = س

إحتمال أن يكون العمر الإفتراضى أصغر من س = ١٥٪

إحتمال أن يتراوح العمر الأفتراضى بين س ، ٣٥٠٠٠ كيلومتر

= ,٥ – ,١٥ = ,٣٥

الأحتمال = ,٣٥ والمطلوب الأن الحصول على قيمة Z من الجدول

= – ١,٠٤

أى أن س تقل عن الوسط الحسابى وهو ٣٥٠٠٠ كيلو بمقدار ١,٠٤ وحدة معيارية .

الفرق بالأرقام المطلقة = ١,٠٤ × ٥٠٠٠ = ٥٢٠٠ كيلومتر

س = ٣٥٠٠٠ – ٥٢٠٠ = ٢٩٨٠٠ كيلو متر

ويمكن الحل القانون كما يلى :-

$$Z = \frac{س - \mu}{\sigma}$$

$$-١,٠٤ = \frac{س - ٣٥٠٠٠}{٥٠٠٠}$$

س – ٣٥٠٠٠ = – ٥٢٠٠

س = ٣٥٠٠٠ – ٥٢٠٠

= ٢٩٨٠٠ كيلو متر

وهو الرقم الواجب وضعه فى الضمان .

تقريب التوزيع الإحتمالى ثنائى الحدين للتوزيع العادى .

Normal Approximation of Binomial Probabilities

سبق أن أوضحنا أنه من الممكن الحصول على التوزيع ثنائى الحدين من القانون .

$${}^{ن}ق_{س} \; ح^{س} \; (١ - ح)^{ن - س}$$

حيث ن عدد مرات إجراء التجربة ،ح إحتمال النجاح فى المرة الواحده ، (١ – ح) = إحتمال الفشل فى المرة الواحدة والمتغير العشوائى س = عدد مرات النجاح المطلوبة ، ثم أوضحنا أنه يمكن الأعتماد على الجداول للحصول على هذه القيم ولكن عندما تكون قيم ن كبيرة فإنه قد لا نجد هذه القيم فى الجداول .

ويرى رجال الأحصاء أنه من الممكن الأعتماد على التوزيع العادى كتقريب للتوزيع ثنائى الحدين عندما تكون .

ن × ح ≥ ٥ ، ن (١ - ح) ≥ ٥

وفى هذه الحالة نجد أن الوسط الحسابى

μ = ن × ح

σ =

$\sqrt{\text{ن} \times \text{ح} \times (١ - \text{ح})}$

مثال :

القيت بقطعة من النقود ١٦ مرة إلى أعلى أوجد إحتمال الحصول على صورة ٦ مرات .

أولا من الجداول .

ثانياً بالتقريب للتوزيع العادى .

الحل :

أولا من الجدول ن = ١٦ ، س = ٦

نجد أن الاحتمال = ١٢٢٢,

ثانيا باستخدام التقريب للتوزيع العادى

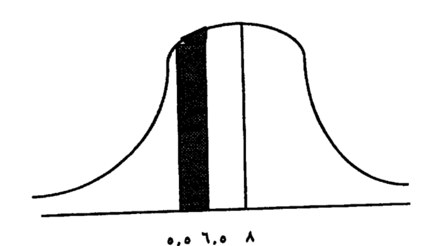
$M = ١٦ \times \frac{١}{٢} = ٨$

$\sigma = \sqrt{١٦ \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}} = ٢$

نظرا لأن الأحتمالات بالنسبة للتوزيعات المستمرة تحسب كمساحة تحت دالة الكثافة الإحتمالية ولهذا فإنه لحساب إحتمال الحصول على ٦ صور فاننا نحسب

المساحة تحت المنحنى العادى بين ٥,٥ ، ٦,٥ وهذا من توزيع منفصل (ثنائى الحدين) إلى توزيع متصل (التوزيع العادى)

وعلى ذلك يمكن حساب إحتمال الحصول على ٦ صور كما يلى :-



$Z\ (١) \quad = \quad \frac{٨ - ٥,٥}{٢} = -١,٢٥$

ح (١) = ,٣٩٤٤

$Z\ (١) \quad = \quad \frac{٨ - ٦,٥}{٢} = -,٧٥$

ح (٢) = ,٢٧٣٤

والاحتمالى المطلوب = ح (١) - ح (٢)

= ,٣٩٤٤ - ,٢٧٣٤

= ,١٢١٠

مقابل ١,٢٢ من الجدول

وهو فرق بسيط يدل على أن التقريب يعطى نتائج جيدة ولا شك فى أن هناك مشكلة تتعلق بعملية التقريب لأن توزيع ثنائى الحدين هو توزيع منفصل فى حين أن التوزيع العادى هوتوزيع متصل - ولفهم هذه الحقيقة نفرض أننا ألقينا بزهرة من زهرات الطاولة ١٢ مرة بدون تحيز فإن احتمال الحصول علي رقم ٥ ست مرات = ^{١٢}ق $_{٦}$ $(\frac{١}{٦})^{٦}$ $(\frac{٥}{٦})^{٦}$

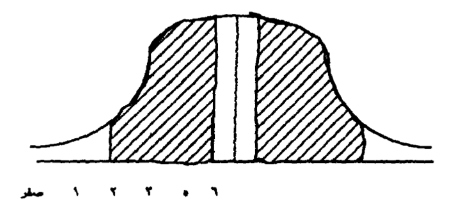
= ٠٠٦٦٣٢٤,

وإحتمال الحصول على رقم ٥ سبع مرات = ^{١٢}ق $_{٧}$ $(\frac{١}{٦})^{٧}$ $(\frac{٥}{٦})^{٥}$

= ٠٠١١٣٦٩,

ولكن من المستحيل أن تحصل على رقم ٥ عدد يزيد عن ٦ مرات ويقل ٧ مرات لأن هذا الاحتمال = صفر لأنه لا يمكن الحصول على رقم ٥ إلا بعدد صحيح من المرات أو صفر مرة (صفر، ١ ، ٢ ، ٣ .... ١٢) ولكن هذا الكلام غير منطقى وغيرجائز بالنسبة للإحتمالات التى تتناول المتغيرات العشوائية المستمرة أى عندما تأخذ قيمة المتغير العشوائى س أى رقم بصورة مستمرة سواء كان عددا صحيحا أو كسرا وعلى ذلك إذا نظرنا إلى منحنى التوزيع العادى لوجدنا لهذا الإحتمال قيمة معينة أكبر من الصفر .

وللوصول الي حل لهذه المشكلة تتصور التوزيع التالى والخاص بالقاء زهرة الطاولة ١٢ مرة



لو أخذنا ح (س ≤ ٦) ، ح (س ≥ ٥) وأردنا تقريبهما باستخدام التوزيع العادى وأخذنا المساحة على يمين رقم ٦ والمساحة على يسار رقم ٥ لكان مجموع المساحتين أصغر من الواحد الصحيح فى حين أن مجموعهما ١ طبقا للتوزيع تنائى الحدين والذى يقوم على أساس الأرقام الصحيحة فقط والمشكلة هنا فى المساحة بين رقم ٥ ، ٦

ولحل هذه المشكلة نعطى نصف هذه المساحة الى ح (س ≤ ٦) ولهذا عند حساب ح (س ≤ ٦) يحتسب المساحة على يمين ٦ − ٠,٥ = ٥,٥ ولحساب قيمة ح (س ≥ ٥) نحسب المساحة على يسار ٥ + ٠,٥ = ٥,٥ وهذا النصف هو الذى نسميه معامل التصحيح للاستمراريه .

مثال :

ألقيت بقطعة من النقود المعدنية ٨ مرات إلى أعلى ما إحتمال الحصول على صوره س من المرات حيث س ≤ ٢ ، ≥ ٦ ٢ ≥ س ≥ ٦

بدون تصحيح ، مع التصحيح

الحل :

الوسط الحسابى = ٨ × $\frac{١}{٢}$ = ٤ والانحراف المعيارى = $\sqrt{٨ \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}}$ = ١,٤١٤

بدون تصحح Z (١) = $\frac{٢ - ٤}{١,٤١٤}$

= ١,٤١٤ ، ح (١) = ٠,٤٢٠٧

Z (٢) = $\frac{٦ - ٤}{١,٤١٤}$ = ١,٤١٤ ، ح (٢) = ٠,٤٢٠٧

الاحتمال = ٠,٤٢٠٧ × ٢ = ٠,٨٤١٤

وفى حالة التصحح

$$Z\ (١) = \frac{١,٥ - ٤}{١,٤٤} = \frac{- ٢,٥}{١,٤١٤} = ١,٧٧$$

ح (١) = ,٤٦١٦

$$Z\ (٢) = \frac{٦,٥ - ٤}{١,٤٤} = \frac{٢,٥}{١,٤٤} = ١,٧٧$$

ح (٢) = ,٤٦١٦

الاحتمال = ,٤٦١٦ × ٢ = ,٩٢٣٢

مثال :

فى المثال السابق ما إحتمال أن يكون عدد الصور أكبر من ٦ بدون تصحيح، مع التصحيح

أولا : بدون تصحيح ح بين ٤ ، ٦ من المثال السابق = ٤٢٠٧, الاحتمال المطلوب = ٥, -٤٢٠٧, = ٠٧٩٣,

ثانيا مع التصحيح : تحسب بين ٤ ، ٥,٥ لأننا نرجع نصف وحده للتصحيح ولنقسم المسافه بين ٥ ، ٦

$$Z = \frac{٥,٥ - ٤}{١,٤١٤} = \frac{١,٥}{١,٤١٤} = ١,٠٦$$

ح = ,٣٥٥٤

الاحتمال المطلوب = ,٥ - ,٣٥٥٤

= ,١٤٤٦

The EX Panential Distribution

يستخدم هذا التوزيع عادة كنموذج جيد عندما يتعلق الأمر بمتغير عشوائى يمثل الزمن أو الوقت اللازم لقضاء خدمه معينه كخدمه الطبيب أو الخدمة التى يقدمها ميكانيكى السيارات أو الخدمة فى محل تجارى - أو متوسط العمر الآفتراض لآى أصل من الآصول ولهذا التوزيع مقياس واحد فقط هو λ كما سنوضح فيما بعد .

كما أن الوسط الحسابى لهذا التوزيع = الانحراف المعيارى لأن التباين = مربع الوسط الحسابى

د (س) أو ح (س)

= λ هـ $^{-س\lambda}$

حيث هـ = كمية ثابتة ٢,٧١٨٢٨

أساس اللوغاريمات الطبيعية

$= \frac{1}{\text{صفر}!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

الوسط الحسابى للتوزيع = $\frac{1}{\lambda}$

التباين = $\frac{1}{\lambda^2}$

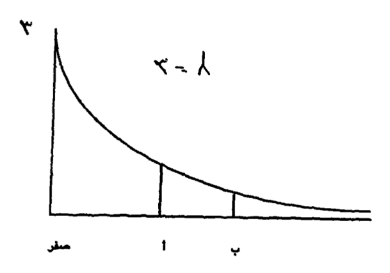
ويجب أن نوضح معنى λ بوضوح حتى يمكن الوصول إلى الحل السليم .

إذا كان الطبيب يستطيع أن يخدم ٤ مرضى فى الساعه فإن الوسط الحسابى للوقت اللازم لخدمة المريض الواحد = $\frac{1}{4}$ وهنا λ = ٤ أى أن λ عدد المرضى الذين يخدمهم الطبيب فى الساعه الواحده .

كما يجب أن نشير إلى أن هذا التوزيع يتعلق بقيم موجبه فقط للمتغير العشوائى الذى لا يمكن أن يأخذ قيمة سالبة لأنه يمثل الوقت اللازم لقضاء خدمه معينه .

وإذا رسمنا عدد من المنحنيات الخاصه بهذا التوزيع نجدها تقطع محور الصادات عند القيمه λ ومعنى هذا أن ح (صفر) $= \lambda$

كما أن إحتمال أن المتغير العشوائى للتوزيع الآسى بأخذ القيمة من أ إلى ب= المساحه تحت المنحنى من النقطة أ إلى النقطة ب



كما تم تخصيص جدول خاص بهذه التوزيعات وسنوضح كيفية إستخدام هذه الجداول بمثال عملى :

مثال :

إذا كان متوسط الوقت اللازم لعلاج المريض فى إحدى عيادات الهيئة العامه للتأمين الصحى = $\frac{١}{٢}$ ساعه للمريض الواحد وأن ذلك يخضع لتوزيع الدالة الأسيه . ما نسبة عدد المرضى الذين يتم حد منهم فى خلال ساعه واحدة ،

فى خلال $\frac{١}{٢}$ ساعه ، خلال ١٠ دقائق ، فى خلال مدة تتراوح بين ساعه واحده ، ٣ ساعات حيث أنه من الممكن خدمه المريض فى $\frac{١}{٣}$ ساعه

∴ فى المتوسط يمكن خدمه ٣ مرضى فى الساعه الواحدة أى أن $\lambda = ٣$

الحاله الأولى أن يتم الخدمة فى خلال ساعه واحدة حيث س تمثل الوقت اللازم لآداء الخدمة وهو يساوى أو ١ أو صفر من ساعه أى س $\leq$ ١

المطلوب هو ح (س $\leq$ ١)

فى هذه الحاله س λ = ١ × ٣ = ٣

نكشف فى الجدول ف (س λ) على يمين ٣ نجد أن الرقم = ‎.٩٥

وهذا يعنى أن ٩٥ ٪ من المرضى يتم خدمتهم خلال مدة زمنية لا تتجاوز الساعه .

(٢) نسبة المرضى الذين يتم خدمتهم فى خلال $\frac{١}{٢}$ ساعه ح (س $\leq \frac{١}{٢}$)
فى هذه الحالة نجد أن س λ = $\frac{١}{٢}$ × ٣ = ١,٥ بالكشف فى الجدول على يمين ١,٥ نجد أن الاحتمال = ‎.٧٧٧ أى أن ٧٧,٧ ٪ من المرضى تم خدمتهم فى خلال نصف ساعه

(٣) فى خلال ١٠ دقائق ←—— نحول إلى ساعات (خلال $\frac{١}{٦}$ ساعه)

ح (س $\leq \frac{١}{٦}$)

س = λ = $\frac{١}{٦}$ × ٣ = ‎.٥

بالكشف فى الجدول على يمين ‎.٥ نجد أن الاحتمال = ‎.٣٩٣ أى أن ٣٩,٣٪ من المرضى يتم خدمتهم فى خلال ١٠ دقائق .

(٤) بين ١ ، ٣ ساعات :

أ . فى حالة س $\geq$ ٣ ساعات

سλ = ٣ × ٣ = ٩

الاحتمال من الجدول = ٩٩٩٨٩, وهذا معناه إحتمال أن يتم آداء الخدمة خلال مدة أكبر من الصفر ولغاية ٣ ساعات .

ب- فى حالة س $\geq$ ١ ساعه ح (س $\geq$ ١) = ٩٥, كما سبق الاشاره إليه

∴ نسبة المرضى الذين يعالجون خلال مده تتراوح بين ساعه واحدة ، ٣ ساعات

= ٩٩٩٨٩, - ٩٥,

= ٠٤٩٨٩,

أى ٥٪ تقريبا من المرضى .

تمارين على التوزيعات الإحتمالية

(١) فيما يلى بيان عن مبيعات السيارات لإحدى الشركات خلال ٣٠٠ يوم عمل . المطلوب إعداد جدول التوزيع الإحتمالى وكذلك الوسط الحسابى والانحراف المعيارى .

عدد السيارات المباعه (س)	عدد الأيام (التكرار ك)
صفر	٣٠
١	٤٥
٢	٥١
٣	١١٤
٤	٣٩
٥	١٨
٦	٣
	٣٠٠

(٢) فى التمرين السابق ما هى القيمة المتوقعة للربح اليومى إذا كانت دالة الربح = أ س + ب = ٢٠٠٠ س + ٦٠٠٠ وكذلك الانحراف المعيارى للربح اليومى .

إرشاد :

(١) القيمة المتوقعة للربح اليومى = أ × القيمة المتوقعة للمتغير س +ب

ق . م للربح اليومى = ٢٠٠٠ ق . م للمتغير س + ٦٠٠٠ .

(٢) تباين الدالة الخطيه σ^{2} (أ س + ب)

= $أ^{2} \times \sigma^{2}$ س

= $أ^{2}$ × تباين المتغير العشوائى س

(٣) الانحراف المعيارى للداله الخطيه = $\sqrt{أ^{2} \times \text{تباين س}}$

(٣) إذا كان إحتمال الفوز فى أى مره = $\frac{١}{١٠}$ وبفرض أنك لعبت ٥ مرات أوجد باستخدام التوزيع ثنائى الحدين إحتمال الفوز للقيم المختلفة للمتغير العشوائى س أعتبارا من س = صفر إلى س = ٥

أ- باستخدام القانون

ب- باستخدام الجداول

وما هو الوسط الحسابى والأنحراف المعيارى لهذا التوزيع .

(٤) دلت الاحصاءات على أنه من كل ١٠٠٠ فرد يدخلون محل شيكوريل يشترى ٣٠٠ فرد منهم فإذا دخل المحل ٦ أفراد أوجد باستخدام التوزيع ثنائى الحدين الاحتمالات الآتية :-

(١) أن يشترى ٣ أفراد منهم فقط

(٢) أن يشترى ٣ أفراد منهم على الأكثر

(٣) أن يشترى ٣ أفراد منهم على الأقل

(٥) إذا كان إحتمال أن تكون الوحده تالفه من إنتاج آلة معينه = ٥ ٪ أخذنا ٢٠ وحده منها بطريقة عشوائية باستخدام التوزيع ثنائى الحدين من

الجدول أوجد الاحتمالات الاتية :-

(١) أن يكون من بينها وحده واحدة تالفه على الأقل .

(٢) أن يكون من بينها وحده ٥ وحدات تالفه على الأكثر

(٣) أن يكون من بينها ١٥ وحده تالفه

(٦) تدل خبره السنوات الماضية أنه من كل ١٠ طلاب يجتاز الأمتحان فى المتوسط ٣ طلاب من الراغبين فى أختبار أمتحان الدكتوراه - بفرض أن ٨ طلاب دخلوا إمتحان العام الحالى أوجد بدون استخدام الجداول الاحتمالات الآتية :-

(أ) إحتمال نجاح طالب واحد على الأقل

(ب) إحتمال نجاح ثلاث طلاب على الأكثر

(جـ) إحتمال نجاح ٦ طلاب على الأكثر

(٧) صندوق به ١٠٠٠ من سلعه معينه نصفها سليم والنصف الآخر معيب سحبنا ٢٠ وحده بطريقة عشوائية إوجد الاحتمالات الآتية :-

(أ) إحتمال أن يكون من بينها ٣ وحدات سليمه على الأقل .

(ب) أحتمال أن يكون من بينها ١٧ وحده سليمه على الأكثر .

(جـ) إحتمال ألا يقل عدد الوحدات السليمة عن وحدتين ولاتزيد عن ٥ وحدات .

(٨) إذا كان متوسط عدد السيارات التى يبيعها أحد الوكلاء = ٤ سيارات يوميا - نفرض تطبيق توزيع بواسون أوجد الإحتمالات الآتية :-

(أ) إحتمال عدم بيع أى سيارة فى أحد الأيام .

(ب) إحتمال بيع عدد يتراوح بين سيارتين ، ٥ سيارات فى اليوم .

(جـ) إحتمال أن بيع أكثر من ٧ سيارات فى اليوم .

(٩) إذا كان متوسط عدد الطلبات التى ترد على سلعه معينه = ٢ فى الساعه الواحده - بفرض تطبيق توزيع بواسون

(أ) ما إحتمال الحصول على ٣ طلبات خلال ساعه

(ب) ٣ طلبات على الأقل خلال ساعه

(جـ) إحتمال الحصول على ٣ طلبات على الأكثر خلال ساعه .

(١٠) إذا كان متوسط عدد الطائرات التى تصل إن مطار القاهرة = ٣ طائرات فى الساعه ما إحتمال عدم وصول أى طائرة فى خلال ساعه واحده - ما أحتمال وصول أقل من ٦ طائرات فى الساعه - ماهو عدد الطائرات الأكثر شيوعا والذى يمكن أن يصل كل ساعه .

إيضاح ←—— العدد الأكثر شيوعا هو المنوال .

(١١) أوجد المساحه تحت منحى التوزيع المعيارى العادى لكل من الفترات التالية

أ- بين Z = ١ ، Z = ٢

ب - بين Z = صفر ، Z = ١,٥

جـ- بين Z = - ١ ، Z = + ١

د- Z أكبر من ٣,٠٨

(١٢) أوجد قيمة Z على المحور تحت منحنى التوزيع المعيارى العادى وذلك فى الأحوال الآتية :-

أ- عندما تكون المساحة بين الصفر ، Z = ,٤٧٧٢

ب- عندما ما تكون المساحة على يمين Z = ,٠٠١٤

جـ- عندما تكون المساحة على يسار Z = ,٩٩٨٦

(١٣) إذا كان متوسط العمر الافتراضى لإطار السيارة = ٣٠ ألف كيلو متر بانحراف معيارى ٥٠٠٠ كيلو - وإذا إفترضنا أن العمر الأفتراضى للإطار يخضع لتوزيع العادى إذا أخذنا أحد الإطارات بطريقة عشوائية أوجد الإحتمالات الآتية :-

أ- أن يزيد العمر الأفتراض عن ٣٠ ألف كيلو مترا

ب- أن يقل العمر الأفتراضى عن ٣٠ ألف كيلو مترا

جـ- أن يتراوح العمر الأفتراضى بين ١٥ ألف كيلو متر ، ٤٠ ألف كيلو متر

د- أن يزيد العمر الافتراضى عن ٤٥٠٠٠ ألف كيلو

هـ- أن تقل العمر الإفتراضى عن عشرة آلاف كيلو

(١٤) إذا كان متوسط الأجر فى إحدى الشركات = ٨٠٠ جنيه شهريا بانحراف معيارى = ٢٠٠ جنيه ما هو الحد الادنى للاجر الذى يجب أن يحصل عليه أحد الأشخاص لكى يعتبر ضمن العشرة فى المائه الذى يحصلون على أعلى الأجور .

(١٥) إذا كان متوسط الزمن اللازم لحل الامتحان من واقع خبره السنوات السابقة = ١٢٠ دقيقة بانحراف معيارى قدره ٢٥ دقيقة ما هو الوقت الواجب منحه للطلاب لحل هذا الأمتحان إذا أراد الأستاذ أن يكون الوقت كافيا لنسبة مقدراها ٨٠ ٪ من الطلاب لأنهاء الأمتحان كله .

(١٦) إذا كان متوسط عدد المشاهدين لمباريات كرة القدم لنادى الزمالك = ٣٠٠٠٠ مشاهد بانحراف معيارى قدره ٥٠٠٠ أوجد الاحتمالات الآتية بفرض أن الظاهرة تخضع للتوزيع العادى .

أ- أن يزيد عدد المشاهدين فى أحد المباريات عن ٨٠ ألف مشاهد .

ب- أن يقل عدد المشاهدين عن ١٢ ألف مشاهد

جـ- أن يتراوح عدد المشاهدين بين ١٥ ألف مشاهد ، ٤٠ ألف مشاهد.

(١٧) إذا كان متوسط وزن العلبه من سلعه معينه = ٥٠٠ جرام بانحراف معيارى قدره ٥٠ جرام وإذا كان التاجر لا يقبل أى علبه يقل وزنها عن ٤٥٠ جرام ما نسبة العلب المرفوضه .

(١٨) القيت بقطعة من النقود مائة مره إلى أعلى أوجد الإحتمالات الآتية على أساس تقريب التوزيع ثنائى الحدين للتوزيع العادى بالتصحيح وبدون تصحيح .

أ- الحصول على الصورة ٥٠ مرة .

ب- الحصول على الصوره ٤٠ مره على الأقل

جـ- الحصول على الصوره عدد يتراوح بين ٣٠ ، ٧٥ مره

د- الحصول على الصوره ٧٠ مره على الأكثر .

(١٩) إذا كان متوسط دخل الموظف فى إحدى الشركات يخضع للتوزيع العادى بوسط حسابى ٨٠٠ جنيه شهريا وإنحراف معيارى = ١٥٠ جنيه أوجد الاحتمالات الآتية :-

أ- أن يتراوح أجر الموظف بين ٥٠٠ جنيه ، ٩٠٠ جنيه .

ب- ألا يزيد المرتب عن ١٢٠٠ جنيه

جـ - أن يقل المرتب عن ٣٨٠ جنيه

(٢٠) إذا كان متوسط الوقت اللازم للتدريب على برنامج للحاسب الآلى = ٢٥٠ ساعه بانحراف معيارى قدره ٥٠ ساعه أوجد الإحتمالات الآتية :-

(١) أن ينهى أحد الأفراد البرنامج فى مدة تقل عن ١٢٠ ساعه

(٢) أن ينهى أحد الأفراد البرنامج خلال ١٥٠ ساعه على الأقل .

(٣) أن ينهى البرنامج خلال ١٢٠ ساعه على الأكثر .

الفصل الخامس

المعاينة وتوزيع المعاينه

المعاينه وتوزيع المعاينه

Sampling and Sampling Distributian

وصف الظواهر المختلفة

الحصر الشامل للمجتمع أو أسلوب العينات : عند الرغبة فى معرفة معلومات عن إحدى الشركات الكبرى والتى يبلغ عدد العاملين بها ١٠٠٠٠ موظف مثلا مثل الوسط الحسابى للأجر والانحراف المعيارى لهذا الأجر ونسبة الحاصلين مثلا على مؤهلات عليا وفانه من الممكن الاعتماد على نظام الحصر الشامل لكل العاملين فنجد مثلا متوسط المرتب الشهرى = ٥٠٠ جنيه والانحراف المعيارى = ١٥٠ جنيه ونسبة الحاصلين على مؤهلات عليا = ٤٠ ٪

وهذه المقاييس نطلق عليها مقاييس المجتمع كله والوسط الحسابى برمز له بالرمز μ = ٥٠٠ جنيه والانحراف المعيارى بالرمز σ = ١٥٠ جنيه

والنسبة ح (أ) = ٤,

ولكن بدلا من الإعتماد على المجتمع الأصلى فقد تأخذ عينه بطريقة عشوائية من عدد من العاملين وليكن ٥٠ موظف ويمكن أن تعطينا نتائج قريبه جدا من نتائج المجتمع الأصلى إذا كانت نعبر عن المجتمع تعبيراً صادقا .

وفى هذه الحالة نطلق عليها احصاءات العينة Statistics بدلا من مقاييس المجتمعParameters مستخدم سَ أو$\bar{X}$ للوسط الحسابى للعينة ، تستخدم S أو ع للانحراف المعيارى للعينة.

أسباب الأخذ بنظام العينات :

مما لا شك فيه أن أسلوب الاعتماد على نظام العينات بوفر وقتا كبيرا ، بل

قد يكون من الصعب الاعتماد على نظام الحصر الشامل أو حتى من المستحيل القيام بالحصر الشامل لضيق الوقت - كما هو الحال بالنسبة لاستطلاع الرأى الخاص بالمرشحين للانتخابات والذى تقوم به المعاهد المتخصصه على فترات قصيرة . والسبب الثانى يتعلق أيضا بالتكاليف - فيمكن مثلا الأعتماد على عينة من ٤٠٠٠ شخص بدلا من حصر عدة ملايين حصراً شاملا يكلف مبالغ طائلة والسبب الثالث الذى يجعلنا نلجأ لأسلوب العينات هو عنصر الدقة فى الحصول على المعلومات عندما يتعلق الأمر بعدد محدود هو مفردات العينة وفى كثير من الأحيان نجد أنه من المستحيل الأعتماد على نظام الحصر الشامل للمجتمع - فهل من الممكن إجراء الفحص على صفقة المواد الغذائية المستورده بالكامل أم الأكتفاء بنظام العينات .

وكذلك عند اختبار صلاحية شحنه من الذخيره فهل نلجأ لتدمير الشحنه كلها للتأكد من صلاحيتها ؟ كل هذا الأسباب تدفعنا للأعتماد على أسلوب المعاينة Sampling لدراسة خصائص المجتمع الأصلى .

انواع العينات :

توجد طريقتان أساسيتان لإختيار العينات من المجتمعات عينات عشوائية Random Samplig وعينات غير عشوائية . وبالنسبة للعينات العشوائية فإنها العينات التى تتم على أساس إعطاء فرصه متكامله لكل مفرده من مفردات المجتمع للاختيار Same Prbability of being selected, فإذا كان لدينا مجتمعا محدوداً وأخذنا منه عينه عشوائية مكونه من ن من المفردات فإن كل وحده فى المجتمع لها فرصه متكافئه للاختيار . فعلى سبيل المثال إذا كان لدينا أربعة أشخاص

أحمد ، بركه ، جاد ، درى

أ ب جـ د

وأردنا أختيار عينه من فردين وكان لكل من أ ، ب ، جـ ، د فرص متكافئه فإنه من الممكن أن نختار

أ ، ب أو أ ، جـ أو أ ، د أو ب ، جـ أو ب ، د أو حـ ، د وعدد العينات المكنه = ٦

$^{٤}ق_{٢} = ٦$

ولكل فرد من الأفراد ولكل عينه من هذه العينات فرصه متكافئه للاختيار

وأما بالنسبة للعينات غير العشوائية فهى التى يتم إختيارها على أساس تقدير شخصى يستند إلى خبره معينه عن المجتمع - وقد تستخدم العينه غير العشوائية كمرشد أو دليل قبل أختيار العينة العشوائية .

وبالنسبة للعينة العشوائية نفسها توجد طرق مختلفة لأختيارها . وفضلا عما سبق تجدد الاشاره إلى أن المعاينة يمكن أن تؤخذ من مجتمع محدود أو مجتمع غير محدود وعموما تستخدم الأرقام العشوائية عند إختيار العينات .

توزيع المعاينة Sampling Dialni butuon

إذا أخذنا الأرقام من ١ إلى ٥

أى (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥)

وأردنا إختيار عينه من رقمين فإن عدد العينات المكنه = $^{٥}ق_{٢}$ = ١٠

وهذه العـــينات هى : ١/٢ ، ١/٣ ، ١/٤ ، ١/٥ ، ٢/٣ ، ٢/٤ ، ٢/٥ ، ٣/٤ ، ٣/٥ ، ٤/٥

الوسط الحسابى للمجتمع الأصلى μ = $\frac{١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥}{٥}$ = ٣

الاوساط الحسابيه للعينات العشره =

١,٥ ، ٢ ، ٢,٥ ، ٣ ، ٣,٥ ، ٣,٥ ، ٤ ، ٤,٥ وإذا أردنا الحصول على الوسط الحسابى لهذه الأرقام لوجدناه $\frac{٣٠}{١٠}$ = ٣

وهذا يعنى أن الوسط الحسابى للمجتمع الأصلى = الوسط الحسابى لتوزيع المعاينة . أى الوسط الحسابى لجميع الأرقام التى تعبر عن الأوساط الحسابيه لجميع العينات الممكنة – ففى المثال السابق يوجد ١٠ عينات ولكل عينه وسط حسابى والذى يساوى الوسط الحسابى للمجتمع الأصلى هو الوسط الحسابى للأوساط الحسابية لهذه العينات ولكن هذا يختلف تماماً عن الوسط الحسابى لكل عينه على حده – فكلما رأينا فى المثال السابق أصغر وسط حسابى كان ١,٥ للعينه (١ ، ٢) وأكبر وسط حسابى كان ٤,٥ للعينه (٤ ، ٥)

الانحراف المعيارى لتوزيع المعاينة

الأوساط الحسابيه لكل العينات الممكنه

هى ١,٥ ، ٢ ، ٢,٥ ، ٣ ، ٢,٥ ، ٣ ، ٣,٥ ، ٣,٥ ، ٤ ، ٤,٥ وانحرافاتها عن الوسط الحسابى لها وهو ٣ =

– ١,٥ ، –١ . –,٥ ، –,٥ ، صفر ، –,٥ ، صفر ، ,٥ ، ,٥ ، ١ ، ١,٥ ومجموع مربعات الانحرافات هى :–

٢,٢٥ + ١ +,٢٥ + ,٢٥ + ,٢٥ + ,٢٥ +١ + ٢,٢٥ = ٧,٥

التباين = $\frac{٧,٥}{١٠}$ = ,٧٥

الانحراف المعيارى = $\sqrt{٠,٧٥}$ = ٠,٨٦٦ (١)

الانحراف المعيارى للمجتمع الاصلى

قيم مفردات المجتمع	١	٢	٣	٤	٥
الانحراف عن الوسط الحسابى	-٢	-١	صفر	١	٢
مربعات الانحرافات ومجموعها	٤	١	صفر	١	٤ = ١٠

التباين = $\frac{١٠}{٥}$ = ٢ والأنحراف المعيارى = $\sqrt{٢}$

الانحراف المعيارى لتوزيع المعاينه $\sigma x` = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

وإذا كان المجتمع الذى نأخذ منه العينه مجتمعًا محدودًا فإن الانحراف المعيارى لتوزيع المتابعه

$$= \sqrt{\frac{N-n}{N-n}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

حيث n = عدد مفردات العينة

، N = عدد مفردات المجتمع

، σ = الانحراف المعيارى للمجتمع وعلى ذلك نجد أنه طبقا للمثال السابق نجد أن الانحراف المعيارى لتوزيع المعاينه

$$= \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} \times \sqrt{\frac{٥-٢}{٥-١}}$$

$$= \sqrt{\frac{٣}{٤}} = ٠,٨٨٦٦ \quad (٢)$$

وهى نفس النتيجة التى وصلنا إليها فى رقم (١)

وخلاصة القول أنه إذا أخذنا عينه عشوائية من مجتمع معين فإن الأمر لا يقتصر على عينه واحده ولكن يمكن أخذ عدد كبير من العينات ويتوقف ذلك على المجتمع وهل هو محدود أو غير محدود وحتى لو كان المجتمع محدوداً فإن عدد العينات =

عدد مفردات المجتمع

ق

عدد مفردات العينه

ق$^{ن}_{ن}$

حيث ن عدد مفردات المجتمع N

، ن عدد مفردات العينه n

وتوزيع المعانيه يخضع للتوزيع العادى أى يمكن وضعه بالتوزيع العادى وبوسط حسابى = الوسط الحسابى للمجتمع الأصلى

وإنحراف معيارى = $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ والذى = $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ بالنسبة للمجتمعات المحدوده .

ويطلق الأحصائيون لفظ الخطأ المعيارى على الانحراف المعيارى لتوزيع المعاينه " Standard Error"

كما أوضحنا أن ابسط طريقة لإختيار لعينة العشوائية هو الاعتماد على جدول الأرقام العشوائية مثل الجدول المرفق بهذا الكتاب - وجدل الأرقام العشوائية يمكن إعداده بطرق كثيرة ولكن أبسط هذه الطرق تتمثل فى وضع الأإقام من صفر إلى ٩ فى كيس وسحب ورقة من الكيس وتسجل الرقم ثم رد الورق المسحوبة إلى الكيس قبل السحبه الثانيه وخلط الأوراق جيدا ثم سحب ورقه

ثانيه ويسجل الرقم وورقة ثالثه ورابعه وهكذا يمكن تكوين جدول أرقام عشوائية باى عدد من الأعمده والصفوف .

انواع العينات :

سبق أن أوضحنا بأنه يوجد طريقان لإختيار العينات من المجتمع هما العينات غير العشوائية أى التى تعتمد على التقدير الشخصى والعينات العشوائية أو الاحتمالية وهذه بدورها تنقسم إلى الأنواع الآتية :-

١- العينة العشوائية البسيطة — Simple Randon Sampling

٢- العينة المنظمه — Systematic Sampling

٣- العينه الطبعية — Stratified Sampling

٤- عينة المجموعات — Cluster Sampling

ا- العينة العشوائية البسيطة

سبق أن أوضحنا أن هذه العينة يتم أخذها على أساس

(١) إعطاء كل عينه ممكنه فرصه متكافئة للإختيار وكذلك .

(٢) إعطاء كل عنصر فى المجتمع فرصه متكافئة فى الإختيار وأبسط طرق الاختيار هو الإعتماد على الأرقام العشوائية .

سواء تم ذلك باستخدام جداول الأرقام العشوائية أو بإستخدام الحاسب الآلى .

ففى المثال الذى أشرنا إليه حيث يتكون المجتمع من ٥ أرقام هى ١ ، ٢، ٣ ،

٤ ، ٥ وبينا أن عدد العينات المكن = ١٠ عينات (بفرض عدم الرد Without Replacement) [١]

فإن لكل عينه فرصه متكافئة للظهور ويكون إحتمال ظهور العينة = $\frac{١}{١٠}$ للعينات العشر وهى

[١/٢ ، ١/٣ ، ١/٤ ، ١/٥ ، ٢/٣ ، ٢/٤ ، ٢/٥ ، ٣/٤ ، ٣/٥ ، ٤/٥]

ولكن إحتمال ظهور رقم ١ فى العينة

ح (١) = ح (١/٢ +١/٣ +١/٤ + ١/٥)

= $\frac{١}{١٠} + \frac{١}{١٠} + \frac{١}{١٠} + \frac{١}{١٠}$ = ٤,

وكذلك كل من ح (٢) ، ح(٣) ، ح (٤) ، ح (٥) = ٤, والهدف من هذا المثال هو إظهار المجتمع المحدود تمييزاً له عن المجتمع غير المحدود – وإن كان البعض يرى أن كل مجتمع يمكن حصره والمسألة تحتاج فقط إلى وقت وإمكانات – وكذلك إثبات أن لكل عينه فرصه متكافئة للإختيار وكذلك لكل مفرده فى المجتمع فرصه متكافئة فى الأختيار

العينة المنتظمة « طبقا لنظام معين » Systematic

وهى العينة التى يتم إختيارها طبقا لنظام معين حيث يتم إختيار العينة من المجتمع على فترات منتظمة طبقا لترتيب معين أو زمن معين أو مكان معين .

---

(١) فى حالة الرد يكون عدد العينات المكنه = ٢٥ أى تساوى (عدد مفردات المجتمع) مرفوعه للاس ٢ وهو عدد مفردات العينه – وفى هذه الحالة نجد أن أى مفرده يمكن أن تتكرر فى نفس العينه أى نختار ٣ ، ٣ لأننا نرد المفرده قبل المسحبه الثانيه .

فمثلا إذا أخذنا الترتيب كأساس وأردنا أن نأخذ عينه من عدد من العاملين فيمكن الرجوع إلى سجل الأرقام المسلسله ونختار أى رقم عشوائى لتبدأ به وليكن رقم ٧ ثم رقم ١٧ ، ٢٧ وهكذا إلى أن يتم إختيار العدد المطلوب - وإذا أردنا أن نجرى دراسة بالعينة على العملاء لإحدى المنشآت التجارية فيمكن أن نختار رقماً عشوائيا نبدأ به وليكن الساعه العاشرة صباحا ثم نسأل الزبون أو العميل الذى يصل كل ١٠ دقائق وهكذا والعشوائية هنا فى الرقم الأول وأما الأرقام التالية فيتم إختيارها طبقا لنظام معين .

٣- العينة الطبقية Stratified Sampling

وفى هذه الحاله يتم تقسيم المجتمع إلى مجموعات متجانسة كل مجموعة منها تسمى طبقه ويتم أختيار عدد معين من كل طبقة بطريقة عشوائية ويحدث ذلك عادة عند وجود إختلاف جوهرى بين طبقات المجتمع المختلفة ونريد تمثيل العينة لكل هذه الطبقات - فمثلا إذا أردنا أن نقوم بدراسة حول الطلب على سلعه معينه فيجب علينا أن نفرق بين الريف والحضر وحتى داخل المدن فإنه يتعين التفرقه بين الأحياء المختلفة حسب مستوى المعيشة ومستوى الدخول وأنواق المستهلكين كما يتم إعطاء كل طبقة من الطبقات عددا من حجم العينة يتناسب مع حجم الطبقة بالنسبة للمجتمع كله أى يتم التوزيع بالنسبة والتناسب .

فمثلا إذا كان حجم المجتمع كله = ٥٠٠٠ وحجم العينه = ١٠٠ وكانت طبقات المجتمع أ ، ب ، جـ ٣٠٠٠ ، ١٥٠٠ ، ٥٠٠ فإن عدد مفردات العينة للطبقات الثلاث = ٦٠ ، ٣٠ ، ١٠ على الترتيب ولكن بالإضافة إلى هذا الأسلوب يوجد أسلوب آخر ويسمى التوزيع الأمثل وفى هذه الحاله يتم الترجيح بالإنحراف المعيارى لكل طبقة على الوجه الآتى :-

عدد مفردات المجتمع كله = ن

عدد مفردات كل طبقة من المجتمع = $ن_١$ ، $ن_٢$ ، $ن_٣$

بحيث ن = $ن_١ + ن_٢ + ن_٣$

عدد مفردات العينة كلها = ن

عدد المفردات من كل طبقه = $ن_١$ ، $ن_٢$ ، $ن_٣$

بحيث ن = $ن_١ + ن_٢ + ن_٣$

والانحراف المعيارى لكل طبقه = $\sigma_١$ ، $\sigma_٢$ ، $\sigma_٣$

$$ن_١ = ن \times \frac{ن_١ \times \sigma_١}{ن_١ \times \sigma_١ + ن_٢ \times \sigma_٢ + ن_٣ \times \sigma_٣}$$

وبالمثل يمكن الحصول على $ن_٢$ ، $ن_٣$

مثال $ن_١ = ٣٠٠٠$ ، $ن_٢ = ٢٠٠٠$ ، $ن_٣ = ٢٥٠٠$

$\sigma_١ = ١٠$ ، $\sigma_٢ = ٥$ ، $\sigma_٣ = ٤$ ، ن = ١٠٠

$$ن_١ = \frac{١٠٠ \times ٣٠٠٠ \times ١٠}{٣٠٠٠ \times ١٠ + ٢٠٠٠ \times ٥ + ٢٥٠٠ \times ٤}$$

$$= ٦٠$$

$$ن_٢ = \frac{١٠٠ \times ٢٠٠٠ \times ٥}{\text{المقام}} = ٢٠$$

وكذلك $ن_٣ = ٢٠$

٤- عينه المجموعات Cluster Sampling

وأساس التقسيم هنا هو التشابه بين المجموعات أى أن كل مجموعة متشابهه مع المجموعه الأخرى ولكن داخل كل مجموعه يوجد خلاف ، عكس الحال

بالنسبة للعينات الطبقية حيث نجد أن كل طبقة تختلف عن الطبقة الأخرى فطبقة أهل الريف تختلف عن طبقة أهل المدن ولكن داخل الطبقة الواحده يوجد تشابه بين مفردات الطبقة تعود إلى عينه المجموعات .

فعند القيام بدراسة معينه عن الأسرة مثلا فإنه من الممكن تقسيم المدينه الكبيره إلى أجزاء مختلفه وإختيار عدد المنازل من كل جزء للقيام بالدراسه ، وهذا الأسلوب إذا أحسن تنفيذه يؤدى إلى إختيار عينات دقيقة بتكاليف بسيطة للغاية .

توزيع الوسط الحسابى للعينة سَ عند المعاينة من مجتمع عادى

كما سبق الإشارة إليه إذا كان لدينا المتغير العشوائى س وكان هذا المتغير يخضع للتوزيع العادى بوسط حسابى μ وإنحراف معيارى σ فأنه من الممكن أخذ عدد كبير من العينا حجم كل منهم ن ولكل عينه وسط حسابى سَ وانحراف معيارى ع فإن سَ تنتمى أيضا إلى توزيع عادى وسطه الحسابى $\mu_{\bar{x}} = \mu$ لوسط الحسابى للمجتمع) وإنحرافه المعيارى $\sigma_{\bar{x}}$

$= \frac{\sigma}{\sqrt{ن}}$ ويسمى هذا التوزيع توزيع المعاينه ويمكن استخدام $\mu_{سَ}$ ، σسَ

وسبق أن أوضحنا أن الإنحراف المعيارى لتوزيع المعاينه يسمى الخطأ المعيارى Standard Error ويرمز له بالرمز σ سَ $\sigma_{\bar{x}}$

وتلخيصا لما سبق يمكن القول أنه عند أخذ عينات حجم كل منها ن من مجتمع له خصائص التوزيع العادى فإن الوسط الحسابى لتوزيع المعاينه = الوسط الحسابى للمجتمع الأصلى والإنحراف المعيارى لتوزيع المعاينة = الإنحراف المعيارى للمجتمع مقسوما على الجذر التربيعى لعدد مفردات العينة كما أن توزيع المعاينة يكون توزيعا عاديا .

ويرجع السبب فى تسمية الإنحراف المعيارى لتوزيع المعاينة بالخطأ المعيارى

إلى أنه عندما نقوم بأخذ عدد من العينات عن ظاهرة معينه فإن كل عينه من هذه العينات يكون لها وسط حسابى يختلف عن الوسط الحسابى للمجتمع وتختلف الأوساط الحسابية للعينات المختلفة عن بعضها البعض بسبب ما يمكن تسميته بخطأ المعاينه نتيجة الصدفه .

Sampling Error due to Chance (١)

أى أن هذه الفروق بين الأوساط الحسابية للعينات المختلفه فيما بينها وكذلك وكذلك بينها وبين المجتمع يرجع إلى العناصر التى تم أختيارها لكل عينه من العينات . وعلى ذلك فتوزيع المعاينه الذى يتميز بضآلة الخطأ المعيارى أفضل بكثير من توزيع العاينة الذى يتزايد فيه الخطأ المعيارى وحيث أن الخطأ المعيارى = خارج قسمة الأنحراف المعيارى للمجتمع على الجذر التربيعى لحجم العينة ، ولذلك نرى أنه كلما كبر حجم العينه كلما أنخفضت قيمة الخطأ المعيارى تفرض ثبات الإنحراف المعيارى للمجتمع . وكذلك ينخفض الخطأ المعيارى لتوزيع المعاينه بإنخفاض الإنحراف المعيارى للمجتمع .

المعاينه من مجتمع غير عادى

وبمقتضى نظرية الحد المركزى The Central Limit treorem نجد أنه حتى بالنسبة للعينات التى يتم إختيارها من مجتمع لا يخضع للتوزيع العادى فإن الوسط الحسابى لتوزيع المعانيه = الوسط الحسابى للمجتمع الأصلى وذلك مهما كان حجم العينه .

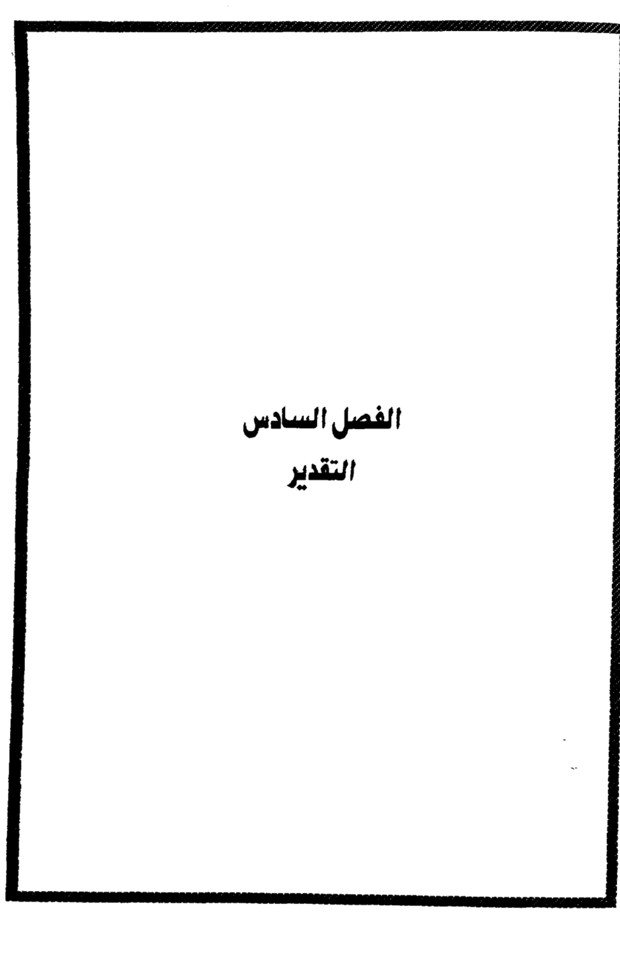
وأما فيما يتعلق بنوعية توزيع المعاينه فقد ثبت أنه مع زيادة حجم العينه يقترب توزيع المعاينه من التوزيع العادى وذلك بغض النظر عن خضوع أو عدم

---

(١) راجع R.I Levin - Statistics for Management Prentice - Hall 1978 P. 189

خضوع المجتمع الأصلى للتوزيع العادى .

وفى الفصل القادم سنتعرض لإستخدام العينات وفى تقدير المقاييس الأساسيه للمجتمع نفسه سواء تعلق الأمر بالوسط الحسابى أو الإنحراف المعيارى أو النسب .



الفصل السادس
التقدير

الفصل السادس

التقدير Estimation

١- تقدير الوسط الحسابى للمجتمع بفرض أننا نعرف الإنحراف المعيارى للمجتمع :

نفرض أننا نعرف أن الإنحراف المعيارى لمتوسط دخل الفرد فى أحد الأحياء= ١٥٠ جنيه شهريا

ويفرض أننا أخذنا عينه من ٤٩ مواطن هذا الحى فوجدنا أن متوسط دخل الفرد = ٥٠٠ جنيه شهريا أى أن سَ = $\frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}$ = $\frac{\text{إجمالى دخول جميع أفراد العينه}}{\text{عدد الأفراد}}$

والآن هل يمكن الإعتماد على الوسط الحسابى للعينه وهو ٥٠٠ جنيه شهريا ونقول أنه يساوى الوسط الحسابى للمجتمع - بديهى أننا لا نستطيع أن نؤكد ذلك، فقد سبق أن أوضحنا أن كل عينه لها وسط حسابى يختلف عن العينات الأخرى ويختلف عن المجتمع ولو تعادل الوسط الحسابى للعينه مع الوسط الحسابى لكان ذلك بمحض الصدفه ولهذا فإن الخطأ هنا (أى الخطأ فى الإعتماد على قيمة سَ لتقدير قيمة μ)

= سَ − μ

ولكن المشكلة أننا لا نعرف قيمة μ بل نسعى إلى تقديرها ولهذا سنتعمد على توزيع المعاينه لمعرفة الخطأ فى التقدير .

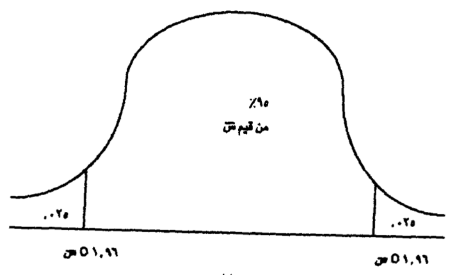
سبق أن أوضحنا أن توزيع المعاينه يقرب من التوزيع الطبيعى إذا كان حجم العينه كبير يساوى أو أكبر من ٣٠ مفرده وأن لهذا التوزيع وسط حسابى = الوسط الحسابى للمجتمع وخطأ معيارى = $\frac{\sigma}{\sqrt{\text{ن}}}$ وبتطبيق ذلك على المثال السابق نجد

أن الخطأ المعيارى لتوزيع المعاينة σ سَ = $\frac{١٥٠}{\sqrt{٤٩}}$ = ٢١,٤ جنيها

وسبق أن أوضحنا عند دراستنا للتوزيع العادى أن ٦٨,٢٦ ٪ من قيم المتغير العشوائى س تختلف بالزيادة أو النقص عن الوسط الحسابى للتوزيع بمقدار وحده معياريه واحده وأن ٩٥,٤٪ من قيم المتغيرات العشوائى س تختلف عن الوسط الحسابى بمقدار وحدتى خطأ معيارى وهكذا .

وينطبق ذلك على توزيع المعاينه (والذى يقرُب من التوزيع العادى) نجد أن ٦٨,٢ ٪ من الأوساط الحسابية للعينات تختلف عن الوسط الحسابى لتوزيع المعاينه (والذى هو الوسط الحسابى للمجتمع) فى حدود وحدة خطأ معيارى واحد ، ٩٥,٤ ٪ من الأوساط الحسابية تختلف فى حدود وحدتين خطأ معيارى وهكذا .

كما أنه يلاحظ أن ٩٥٪ من العينات تنحرف بالزيادة أو النقص بمقدار ١,٩٦ وحدة خطأ معيارى عن الوسط الحسابى كما يتضح من الرسم التالى :



وينطبق ذلك مثالنا هذا حيث وحدة الخطا المعيارى الواحدة = ٢١,٤ جنيها فإننا نستطيع أن نقول أن ٩٥٪ من العينات ينحرف وسطها الحسابى عن الوسط الحسابى للمجتمع بمقدار ١,٩٦ وحده خطأ معيارى × ٢١,٤ جنيها

= ٤١,٩٤٤ جنيها = ٤٢جنيها تقريبا .

أو بعبارة أخرى نستطيع أن نقول أن ٩٥٪ من الأوساط الحسابية للعينات تقع فى حدود ± ٤٢ جنيها من الوسط الحسابى للمجتمع – أى أن كل هذه العينات ستظهر من الخطأ مالا يتجاوز ± ٤٢ وهذا لا ينفى أن هناك ٥٪ من العـينات وسطها الحسابى يزيد أو ينقص عن الوسط الحسابى للمجتمع بأكثر من ٤٢ جنيه

وكذلك من الممكن أن تشير إلى أن ٩٩٪ من الأوساط الحسابية للعينات تزيد أو تنقص عن الوسط الحسابى للمجتمع فى حدود ٢,٥٨ وحدة خطأ معيارى أو فى حدود ٢,٥٨ × ٢١,٤ = ٥٥,٢ جنيه

أى أننا نستطيع أن نقرر بإحتمال قدره ٩٩٪ أن الخطأ وفى التقدير لن يتجاوز ± ٥٥,٢ إذا إعتمدنا على الوسط الحسابى للعينه وهو ٥٠٠ جنيه شهريا لتقدير الوسط الحسابى للمجتمع وهذا يعنى أن ٥٥,٢ هى الحد الأقصى للخطأ فى التقدير والآن عندما يكون هناك إحتمال قدره ٩٥٪ أو ٩٩٪ فإن المتمم للواحد الصحيح سنطلق عليه αأى أن α = ٠,٠٥ ، ٠,٠١ على الترتيب .

وعلى ذلك يكون الاحتمال نفسه = ١− α

وعلى ذلك إذا إفترضنا أننا نرغب فى المثال السابق فى الحصول على أقصى خطأ فى التقدير بفرض أن α = ٠,٠٢ فاننا نتبع الخطوات التالية :-

α = ٠,٠٢ ، $\frac{\alpha}{٢}$ = ٠,٠١

الإحتمال = ٥, - ٠١, = ٤٩,

قيمة Z التى تقابل إحتمالا قدره ٤٩, من جدول التوزيع المعيارى العادى = ٢,٣٣ وحدة خطأ معيارى ، الحد الأقصى للخطأ فى التقدير بدلالة القيم المطلقة = ٢,٣٣ × ٢١,٤ = ٤٩,٨٦ جنيها

مما سبق يتضح أنه كلما زاد الإحتمال زادت قيمة الخطأ فى التقدير .

فعندما كان الإحتمال ٩٥٪ كان الحد الأقصى للخطأ فى التقدير ١,٩٦ وحدة خطأ معيارى ، ٤٢ جنيها بالأرقام المطلقه وعندما كان الإحتمال ٩٨٪ كان الحد الأقصى للخطأ فى التقدير ٢,٣٣ خطأ معيارى ، ٤٩,٨٦ جنيها بالأرقام المطلقه وعندما كان الإحتمال ٩٩٪ كان الخطأ فى التقدير ٢,٥٨ وحدة خطأ معيارى ، ٥٥,٢ جنيها .

الحد الأدنى والأقصى للتقدير

فى المثال السابق أستطعنا أن نعتمد على الوسط الحسابى للعينة لتقدير الوسط الحسابى للمجتمع وبدرجة خطأ معينه وبأحتمال معين ويسمى هذا بالتقدير عند نقطة معينه Point Estimate ولكن من الممكن أن نضع ما نصل إليه فى صورة أخرى فمثلا فى المثال السابق أوضحنا أننا نقدر الوسط الحسابى لدخل الفرد فى المجتمع بمبلغ ٥٠٠ جنيه ونجد أقصى للخطأ = ± ٤٢ وباحتمال قدره ٩٥٪ وبدلا من ذلك فإنه من الممكن عرض هذا التقدير فى صورة فتـــرة Interval Estimate أى يوضع حد أدنى للتقدير = ٥٠٠ - ٤٢ = ٤٥٨ جنيها وحد أقصى للتقدير = ٥٠٠ +٤٢ = ٥٤٢ جنيها وتقول أننا نقدر الحد الأدنى لمتوسط دخل الفرد فى المجتمع بمبلغ ٤٥٨ والحد الاقصى بمبلغ ٥٤٢ جنيه وباحتمال قدره ٩٥٪

وهكذا كلما زادت قيمة الإحتمال وقل الفرق بين الحد الأدنى والحد الأقصى للتقدير كلما دل ذلك على سلامة التقدير والعكس صحيح .

ونستطيع أن نؤكد هذه الحقيقة بزيادة حجم العينة فى المثال السابق من ٤٩ فرد إلى ٤٠٠ فرد ونرى أثر ذلك على تقدير الحد الأدنى والحد الأقصى لدخل الفرد فى المجتمع فى إطار إحتمالات مختلفة .

الخطأ المعيارى الجديد = $\frac{١٥٠}{\sqrt{٤٠٠}}$ = ٧,٥ جنيه

الحد الأقصى للخطأ فى التقدير باحتمال قدره ٩٥٪ = ١,٩٦ وحده خطأ معيارى وبالقيم المطلقة = ١,٩٦ × ٧,٥ = ١٤,٧ جنيه بدلا من ٤٢ جنيه عندما كان حجم العينة = ٤٩ وإذا كان الإحتمال ٩٩٪ يصبح أقصى خطأ فى التقدير بالقيم المطلقة = ٢,٥٨ × ٧,٥ = ١٩,٣ جنيه بدلا من ٥٥,٢ جنيه عند حجم عينه من ٤٩ فرد .

وكذلك إذا كان الأحتمال ٩٨٪ فإن أقصى خطأ فى التقدير بالقيم المطلقة = ٢,٣٣ × ٧,٥ = ١٧,٥ بدلا من ٤٩,٨ جنيه

مما سبق نستطيع أن نستنتج أن تقدير الوسط الحسابى فى المجتمع يتوقف على :-

الأنحراف المعيارى للمجتمع = σ

حجم العينة = ن

قيمة Z التى تجعل قمة كل طرف = $\frac{\alpha}{٢}$

ولذلك يمكن أن نقول $Z_{\frac{\alpha}{٢}}$

الوسط الحسابى للعينة سَ

ولهذا نقول أن

الوسط الحسابى للمجتمع = سَ $\pm \; Z_{\frac{\alpha}{z}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{ن}}$

$$M = \bar{x} \pm Z_{\frac{\alpha}{z}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

وعلى ذلك نكون قد إفترضنا معرفة الرنحراف المعيارى للمجتمع ولكن ما هو الحال إذا كانت σ غير معروفة ؟ .

تقدير النسبة فى المجتمع من واقع النسبة فى العينة :

حتى يمكن فهم هذا الموضوع نفترض أننا نقيس نسبة التلف فى إنتاج أحد المصانع - لا شك فى أن هناك نسبة تلف للمجتمع كله وسنفترض أن هذه النسبة = م .

فإذا أخذنا أى عينة من إنتاج المصنع فإن كل عينة سنجد بها نسبة تلف تختلف عن الأخرى وتسمى كل منها مَ ولا شك فى أن الوسط الحسابى لكل قيم مَ= النسبة فى المجتمع وهى = م

فإذا كانت نسبة التلف على مستوى المجتمع كله = ٠٢ ,

أى أن م = ٠٢ ,

فإن الوسط الحسابى لنسب التلف فى كل العينات الممكنه = أيضا ٠٢ ,

وإذا كان الوسط الحسابى لكل نسب التلف من واقع العينات = م أى نسبة التلف فى المجتمع فإن الإنحراف المعيارى لهذا التوزيع كما يلى :-

$\sigma_{\acute{م}} = \sqrt{\frac{م(١-م)}{ن}}$. إذا كان المجتمع غير محدود

كما أن $\sigma_{\acute{م}} = \sqrt{\frac{م(١-م)}{ن}} \times \sqrt{\frac{ن-ن}{ن-١}}$ اذا كان المجتمع محدوداً

وجدير بالذكر أن توزيع المعاينة للنسب مَ يمكن تقريبه لتوزيع إحتمالى عادى عندما يكون حجم العينة كبيرا .

ويرى بعض الإحصائيين أنه يمكن تحقيق ذلك بتوافر شرطين :-

(١) أن يكون $ن \times م \geq ٥$

(٢) أن يكون $ن(١-م) \geq ٥$

وسبق أن تحدثنا عن التوزيع ثنائى الحدين وهو التوزيع المناسب للتوزيع الإحتمالى للنسب – كما بيننا أنه يمكن تقريب التوزيع ثنائى الحدين للتوزيع العادى . وسنطبق ذلك على النسب .

. $\mu = ن \times ح$

. $\sigma = \sqrt{ن \times ح \times (١-ح)}$

هذا عند التحدث عن المتوسط بالأعداد ولتحويل الأعداد إلى نسب نقسم كل من الوسط الحسابى والانحراف المعيارى على ن

فيصبح المتوسط أى النسبة $= \frac{ن \times ح}{ن} = ح$

ويصبح الإنحراف المعيارى $= \sqrt{\frac{ن \times ح(١-ح)}{ن^٢}}$

$= \sqrt{\frac{ح(١-ح)}{ن}}$

أى هنا $= \sqrt{\frac{م(١-م)}{ن}}$

وهذه تسمى الخطأ المعيارى للنسبة

$$\sigma \; مَ = \sqrt{\frac{م(١-م)}{ن}} \; .$$

٣. مَ = م نسبة المجتمع ويمكن إستخدام ذلك على الوجه الأكمل كما يتضح من المثال التالى :

يريد أحد المرشحين لإنتخابات مجلس الشعب فى إحدى دوائر الشرقية تقدير إحتمال نجاحة فى الانتخابات أخذ عينه من ٤٠٠ ناخب فكانت نسبة الموافقين على إنتخابه = ,٧٠ أى ٧٠٪ أوجد بدرجة ثقة ٩٩٪ تقريرك للحد الأدنى والحد الأعلى لنسبة من ينتخبون هذا المرشح .

$$\sigma \; مَ = \sqrt{\frac{م(١-م)}{ن}} = \sqrt{\frac{,٧ \times ,٣}{٤٠٠}} = ,٠٢٢٩ \; .$$

عندما درجة الثقة = ٩٩٪

الاحتمال = ,٤٩٥

. Z = ٢,٥٨

النسبة المطلوبة = ,٧ ± ٢,٥٨ × ,٠٢٢٩ = ,٧ ± ,٠٥٩

أى أن الحد الأدنى لنسبة الموافقين ٦٤,١ ٪ والحد الأقصى = ٧٥,٩ ٪

وفى المثال السابق ما هو تقديرك للحد الأدنى والأعلى لنسبة الموافقين إذا كانت درجة الثقة ٩٥٪ .

عندما درجة الثقة = ,٩٥

الاحتمال = ,٤٧٥

Z. = ١,٩٦

النسبة المتوقعة للموافقين على إنتخاب المرشح

= ٠,٧٠ ± ١,٩٦ × ٠,٠٢٢٩

٠,٧٠ ± ٠,٠٤٥

الحد الأدنى = ٦٥,٥٪ والحد الأعلى = ٧٤,٥ ٪

فى المثال السابق ما تقديرك للحد الأدنى والأعلى بدرجة ثقة ٩٩٪ إذا كان حجم العينة = ١٥٠

فى هذه الحالة σمَ = $\sqrt{\frac{٠,٧ \times ٠,٣}{١٥٠}}$ = ٠,٠٣٧٤

نسبة المجتمع = ٠,٧ ± ٠,٠٣٧٤ × ٢,٥٨ = ٠,٧ ± ٠,٠٩٧

الحد الأدنى = ٦٠,٣ ٪ والحد الأقصى = ٧٩,٧ ٪

ويلاحظ زيادة الخطأ فى التقدير نتيجة لإنخفاض حجم العينة من ٤٠٠ إلى ١٥٠ عند نفس نسبة الاحتمال وهى ٩٩٪ .

تقدير الوسط الحسابى للمجتمع بغرض أن σ غير معروفة

الحالة الأولى : إذا كان حجم العينة كبيرا (٣٠ أو أكثر)

فى هذه الحاله تستخدم S (الانحراف المعيارى للعينة) بدلا من σ وتطبق نفس القواعد السابقة أى أن الوسط الحسابى للمجتمع

= سَ ± $Z_{\frac{\alpha}{٢}} \times \frac{S}{\sqrt{ن}}$

$$\mu = \bar{X} \pm \frac{Z_{\alpha}}{z} \times \frac{S}{\sqrt{n}}$$

الحالة الثانية : إذا كان حجم العينة صغيرا (أقل من ٣٠)

فى هذه الحالة لن نستخدم التوزيع العادى ولكن نستخدم توزيعا آخر يسمى t distribution والذى جاء نتيجة لبحث عالم يدعى جوسيت ونشره لأسباب خاصه بأسم Student

وهذا التوزيع يلاحظ أنه يكون أدنى من التوزيع العادى عند الوسط الحسابى وأعلى من التوزيع العادى عند طرفى المنحنى ولكن كل من التوزيعين يتميزان بأنهما ينقسمان إلى قسمين متماثلين وإن كان منحنى توزيع t له قمه منخفضه عن المنحنى العادى ولكن كلما زاد حجم العينة كلما تقارب شكل المنحيين.

ويمكن الكشف فى جدول t بالإعتماد على درجات الحريه والتى تساوى (ن-١) أى عدد مفردات العينة -١ وكذلك ∝ فمثلا إاذا كان مستوى الثقة = ٩٥٪ فإن ∝ = ٠,٠٥ وكان عدد مفردات العينة = ١٦ فإن درجات الحريه = ١٥ - نكشف فى جدول t تحت رقم ٠,٠٥ وأمام رقم ١٥ نجد أن الاحتمال = ٢,١٣ وجدير بالذكر أنه كلما زادت عدد مفردات العينة أقترب الاحتمال من الاحتمال الخاص بالتوزيع الطبيعى (مثال عند درجة ١٢٠ الاحتمال = ١,٩٨ يقابل ١,٩٦ للتوزيع الطبيعى.

وسنوضح كيفية إستخدام توزيع t عدد من الأمثله العملية :

مثال (١)

فى جولة لأحد مفتش وزارة التموين على أحد المخابز أخذ عينة من ٢٠ رغيف وقام بحساب الوسط الحسابى والإنحراف المعيارى لهذه العينة فوجد أن الوسط الحسابى لوزن الرغيف = ١٤٠ جرام والإنحراف المعيارى = ١٨ جرام ما هو أقصى خطأ فى تقدير متوسط وزن الرغيف لأنتاج المخبز كله على أساس متوسط وزن الرغيف من واقع العينة وما هو الحد الأدنى والحد الأقصى لمتوسط وزن الرغيف فى المجتمع بدرجة ثقة ٩٥ ٪

α. = ١ - ,٩٥ = ,٠٥

عدد مفردات العينة = ٢٠

درجات الحرية = ١٩

حيث أن عدد مفردات العينة أصغر من ٣٠ والأنحراف المعيارى للمجتمع غير معروف – نستخدم توزيع t

أقصى خطأ فى التقدير = عدد وحدات الخطأ المعيارى × قيمة وحدة الخطأ المعيارى

وحدة الخطأ المعيارى الواحدة =

$$\frac{ع}{\sqrt{ن}} \quad \text{أى} \quad \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$= \frac{١٨}{\sqrt{٢٠}} = ٤,٢٥$$

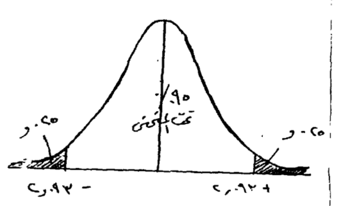
وبالكشف فى الجداول عن قيمة t أمام درجات حريه ١٩ وتحت ,٠٥ نجد أن قيمة t = ٢,٠٩٣

الحد الأقصى للخطأ = ٢,٠٩٣ وحده خطأ معيارى

أو = ٢,٠٩٣ × ٤,٠٢٥ = ٨,٤٢ جرام

الحد الأدنى والأقصى لمتوسط وزن الرغيف فى المجتمع = ١٤٠ ± ٨,٤٢

= ١٣١,٦ ←—— ١٤٨,٤ جرام بدرجة ثقة ٩٥ ٪ أى أن ٥٪ فقط على الطرفين الإيمن والإيسر كما يتضح من الرسم التالى :



تقدير النسبة فى المجتمع من واقع عينة صغيرة

إذا كانت النسبة من واقع العينة الكبيرة = حَ مثلا فإن النسبة فى المجتمع يمكن تقديرها على أساس حَ وأن أقصى خطأ فى تقدير النسبة = $Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{ح(١-ح)}{ن}}$

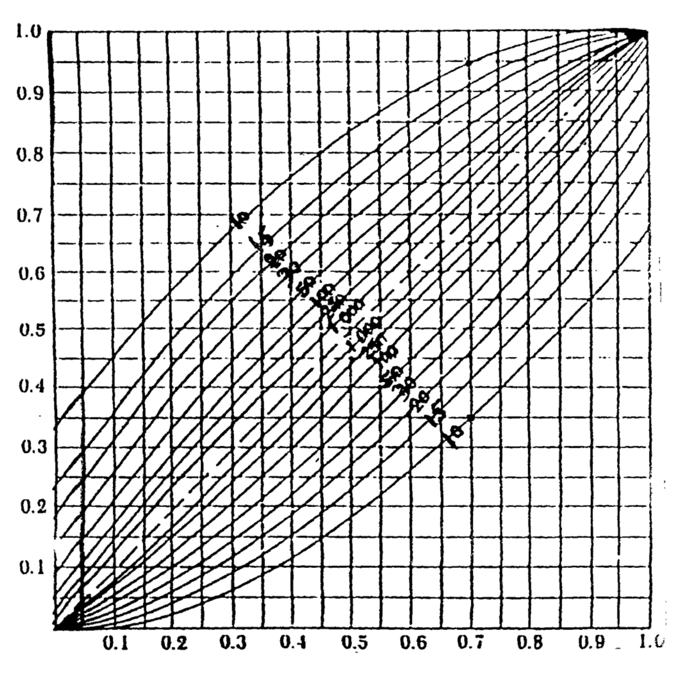
وفى هذه الحالة نقول أن ح = حَ ± $Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{ح(١-ح)}{ن}}$

وعندما تكون العينة أصغر من ١٠٠ فإن الإحصائيين يعتمدون على التوزيع ثنائى الحدين لتحديد الحد الأدنى والحد الأقصى لتقدير النسبة فى المجتمع [١]

ويمكن الأعتماد على الجدول الآتى والذى يمكن إستخدامه بسهولة :

---

(١) راجع Pattercn , Statistical Methads, Inwin , 1981 , P. 257 , 258



النسبة من واقع العينة = ٧, درجة الثقة ٩٥,

عدد مفردات العينة = ١٠

فى هذه الحالة نختار ٧, على المحور الأفقى ثم نتجة مع الخط رأسيا حتى يتقاطع مع منحنى رقم ١٠ من أسفل إلى أعلى نجد أن النسبة = ٣٥, (الحد

الأدنى) ثم بتقاطع مع منحنى رقم ١٠ مرة ثانية عند ٩٥. (لأن هذا هو الذى يمثل عدد مفردات العينة ١٠)

أى أن الحد الأدنى للنسبة فى المجتمع = ٣٥. والحد الأقصى ٩٥. وإذا أردنا أن نقارن بين النتائج السابقة ، وبين ما يمكن أن نحصل عليه باستخدام التوزيع العادى فنجد أن :-

$$ح = حَ \pm Z_{\frac{\alpha}{٢}} \times \sqrt{\frac{حَ(١-حَ)}{ن}}$$

$$= ,٧ \pm ١,٩٦ \sqrt{\frac{,٧ \times ,٣}{١٠}}$$

$$= ,٧ \pm ,٢٨٤$$

$$,٤١٦ \leq ح \leq ,٩٨٤$$

تحديد حجم العينة

الأمر هنا يتعلق بتحديد حجم العينة المناسب والذى يجعل الحد الأقصى للخطأ عند الأعتماد على متوسط العينة كأساس لتقدير متوسط المجتمع وبدرجة ثقة معينة .

فمثلا إذا إفترضنا أن الانحراف المعيارى لعمر الفرد فى كلية الإدارة = ٣ سنوات على مستوى مجتمع الكلية كله ما هو حجم العينة الواجب أخذها لكى لا يتجاوز الحد الأقصى للخطأ فى التقدير ٦٤٥ر سنه بدرجة ثقة ٩٩٪ .

الحل :

فى هذه الحالة الخطأ فى التقدير = عدد وحدات الخطأ المعيارى

× قيمة وحدة الخطأ المعيارى

$$\text{الخطأ المعيارى} = \frac{\sigma}{\sqrt{ن}} = \frac{٣}{\sqrt{ن}}$$

للحصول على عدد وحدات الخطأ المعيارى أى قيمة Z

الاحتمال = ٩٩, ÷ ٢ = ٤٩٥,

قيمة Z = ٢,٥٨

وهذا الرقم هو أقصى خطأ بدلالة الوحدات الخاصة بالخطأ المعيارى

أقصى خطأ بدلالة الوحدات المطلقة

$= \frac{٣}{\sqrt{ن}} \times ٢,٥٨$ سنه

∴ ٦٤٥, سنه $= \frac{٣}{\sqrt{ن}} \times ٢,٥٨$

∴ ٦٤٥, $\sqrt{ن}$ = ٣ × ٢,٥٨ = ٧,٧٤

∴ $\sqrt{ن} = \frac{٧,٧٤}{٦٤٥,}$ = ١٢

ن = ١٤٤

ويمكن أن تصل إلى القانون الآتى $n = \left(\frac{\sigma \times Z}{E} \right)^2$

أى أن

$ن = \left(\frac{\sigma \times Z}{خ} \right)^٢$

حيث E أو خ عبارة عن أقصى خطأ مسموح به بدلالة الأرقام المطلقة ، Z عدد وحدات الخطأ المعيارى طبقا لدرجة الثقة المطلوبة ، σ الإنحراف المعيارى للمجتمع .

وبتطبيق القانون على المثال السابق نجد أن

$ن = \left(\frac{٣ \times ٢,٥٨}{٦٤٥,} \right)^٢ = \left(\frac{٧,٧٤}{٦٤٥,} \right)^٢$

= ١٤٤

وهى نفس النتيجة التى وصلنا لها .

مثال :

أوجد حجم العينة الواجب أخذها من مجتمع انحرافه المعيارى = ٥٠ جنيه شهريا إذا أردنا ألا يتجاوز الحد الأقصى للخطأ فى التقدير ١٠ جنيه بدرجة ثقة ٩٩٪ (لأقرب عشرة أرقام)

القانون $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{ن}}$

$$n = \left(\frac{\sigma \times Z_{\frac{\alpha}{2}}}{E} \right)^2$$

باللغة العربية =

$$ن = \left(\frac{Z \times \sigma}{خ} \right)^٢$$

١٦٦,٤ = ١٦٧

وهنا نقول ١٧٠ لأقرب عشرة أرقام

توزيع ثنائي الحدين حيث n = عدد مرات إجراء التجربة ، x = عدد حالات النجاح

، p = احتمال النجاح في المرة الواحدة

Table I Binomial Probabilities—$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

		p										
n	*x*	*0.1*	*0.2*	*0.25*	*0.3*	*0.4*	*0.5*	*0.6*	*0.7*	*0.75*	*0.8*	*0.9*
1	*0*	0.900	0.800	0.750	0.700	0.600	0.500	0.400	0.300	0.250	0.200	0.100
	1	0.100	0.200	0.250	0.300	0.400	0.500	0.600	0.700	0.750	0.800	0.900
2	*0*	0.810	0.640	0.563	0.490	0.360	0.250	0.160	0.090	0.063	0.040	0.010
	1	0.180	0.320	0.375	0.420	0.480	0.500	0.480	0.420	0.375	0.320	0.180
	2	0.010	0.040	0.063	0.090	0.160	0.250	0.360	0.490	0.563	0.640	0.810
3	*0*	0.729	0.512	0.422	0.343	0.216	0.125	0.064	0.027	0.016	0.008	0.001
	1	0.243	0.384	0.422	0.441	0.432	0.375	0.288	0.189	0.141	0.096	0.027
	2	0.027	0.096	0.141	0.189	0.288	0.375	0.432	0.441	0.422	0.384	0.243
	3	0.001	0.008	0.016	0.027	0.064	0.125	0.216	0.343	0.422	0.512	0.729
4	*0*	0.656	0.410	0.316	0.240	0.130	0.063	0.026	0.008	0.004	0.002	0.000
	1	0.292	0.410	0.422	0.412	0.346	0.250	0.154	0.076	0.047	0.026	0.004
	2	0.049	0.154	0.211	0.265	0.346	0.375	0.346	0.265	0.211	0.154	0.049
	3	0.004	0.026	0.047	0.076	0.154	0.250	0.346	0.412	0.42[illegible]	0.410	0.292
	4	0.000	0.002	0.004	0.008	0.026	0.063	0.130	0.240	0.31[illegible]	0.410	0.656
5	*0*	[illegible]	0.328	0.237	0.168	0.078	0.031	0.010	0.002	0.001	0.000	0.000
	1	0.328	0.410	0.396	0.360	0.259	0.156	0.077	0.028	0.015	0.006	0.000
	2	[illegible]	0.205	0.264	0.309	0.346	0.312	0.230	0.132	0.088	0.051	0.008
	3	0.008	0.051	0.088	0.132	0.230	0.312	0.346	0.309	0.264	0.205	0.073
	4	0.000	0.006	0.015	0.028	0.077	0.156	0.259	0.360	0.396	0.410	0.328
	5	0.000	0.000	0.001	0.002	0.010	0.031	0.078	0.168	0.237	0.328	0.590
6	*0*	0.531	0.262	0.178	0.118	0.047	0.016	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000
	1	0.354	0.393	0.356	0.303	0.187	0.094	0.037	0.010	0.004	0.002	0.000
	2	0.098	0.246	0.297	0.324	0.311	0.234	0.13[illegible]	0.060	0.033	0.015	0.001
	3	0.015	0.082	0.132	0.185	0.276	0.313	0.27[illegible]	[illegible]	0.132	0.082	0.015
	4	0.001	0.015	0.033	0.060	0.138	0.234	0.311	[illegible]	0.297	0.246	0.098
	5	0.000	0.002	0.004	0.010	0.037	0.094	0.187	[illegible]	0.356	0.393	0.354
	6	0.000	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	0.047	[illegible]	0.178	0.262	0.531
7	*0*	0.478	0.210	0.133	0.082	0.028	0.008	0.002	[illegible]	0.000	0.000	0.000
	1	0.372	0.367	0.311	0.247	0.131	0.055	0.017	[illegible]	0.001	0.000	0.000
	2	0.124	0.275	0.311	0.318	0.261	0.164	0.077	[illegible]	0.012	0.004	0.000
	3	0.023	0.115	0.173	0.227	0.290	0.273	0.194	0.097	0.058	0.029	0.003
	4	0.003	0.029	0.058	0.097	0.194	0.273	[illegible]	[illegible]	0.173	0.115	0.023
	5	0.000	0.004	0.012	0.025	0.077	0.164	[illegible]	0.318	0.311	0.275	0.124
	6	0.000	0.000	0.001	0.004	0.017	0.055	[illegible]	[illegible]	0.311	0.367	0.372
	7	0.000	0.000	0.000	0.000	0.002	0.008	[illegible]	[illegible]	0.133	0.210	0.478

Table I (continued)

n	x	p = 0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.75	0.8	0.9
8	0	0.430	0.168	0.100	0.058	0.017	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
	1	0.383	0.336	0.267	0.198	0.090	0.031	0.008	0.001	0.000	0.000	0.000
	2	0.149	0.294	0.311	0.296	0.209	0.109	0.041	0.010	0.004	0.001	0.000
	3	0.033	0.147	0.208	0.254	0.279	0.219	0.124	0.047	0.023	0.009	0.000
	4	0.005	0.046	0.087	0.136	0.232	0.273	0.232	0.136	0.087	0.046	0.005
	5	0.000	0.009	0.023	0.047	0.124	0.219	0.279	0.254	0.208	0.147	0.033
	6	0.000	0.001	0.004	0.010	0.041	0.109	0.209	0.296	0.311	0.294	0.149
	7	0.000	0.000	0.000	0.001	0.008	0.031	0.090	0.198	0.267	0.336	0.383
	8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.004	0.017	0.058	0.100	0.168	0.430
9	0	0.387	0.134	0.075	0.040	0.010	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	1	0.387	0.302	0.225	0.156	0.060	0.018	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000
	2	0.172	0.302	0.300	0.267	0.161	0.070	0.021	0.004	0.001	0.000	0.000
	3	0.045	0.176	0.234	0.267	0.251	0.164	0.074	0.021	0.009	0.003	0.000
	4	0.007	0.066	0.117	0.172	0.251	0.246	0.167	0.074	0.039	0.017	0.001
	5	0.001	0.017	0.039	0.074	0.167	0.246	0.251	0.172	0.117	0.066	0.007
	6	0.000	0.003	0.009	0.021	0.074	0.164	0.251	0.267	0.234	0.176	0.045
	7	0.000	0.000	0.001	0.004	0.021	0.070	0.161	0.267	0.300	0.302	0.172
	8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.004	0.018	0.060	0.156	0.225	0.302	0.387
	9	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.002	0.010	0.040	0.075	0.134	0.387
10	0	0.349	0.107	0.056	0.028	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	1	0.387	0.268	0.188	0.121	0.040	0.010	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000
	2	0.194	0.302	0.282	0.233	0.121	0.044	0.011	0.001	0.000	0.000	0.000
	3	0.057	0.201	0.250	0.267	0.215	0.117	0.042	0.009	0.003	0.001	0.000
	4	0.011	0.088	0.146	0.200	0.251	0.205	0.111	0.037	0.016	0.006	0.000
	5	0.001	0.026	0.058	0.103	0.201	0.246	0.201	0.103	0.058	0.026	0.001
	6	0.000	0.006	0.016	0.037	0.111	0.205	0.251	0.200	0.146	0.088	0.011
	7	0.000	0.001	0.003	0.009	0.042	0.117	0.215	0.267	0.250	0.201	0.057
	8	0.000	0.000	0.000	0.001	0.011	0.044	0.121	0.233	0.282	0.302	0.194
	9	0.000	0.000	0.000	0.000	0.002	0.010	0.040	0.121	0.188	0.268	0.387
	10	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.006	0.028	0.056	0.107	0.349
11	0	0.314	0.086	0.042	0.020	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	1	0.384	0.236	0.155	0.093	0.027	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.00
	2	0.213	0.295	0.258	0.200	0.089	0.027	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000
	3	0.071	0.221	0.258	0.257	0.177	0.081	0.023	0.004	0.001	0.000	0.000
	4	0.016	0.111	0.172	0.220	0.236	0.161	0.070	0.017	0.006	0.002	0.000
	5	0.002	0.039	0.080	0.132	0.221	0.226	0.147	0.057	0.027	0.010	0.002
	6	0.000	0.010	0.027	0.057	0.147	0.226	0.221	0.132	0.080	0.039	0.016
	7	0.000	0.002	0.006	0.017	0.070	0.161	0.236	0.220	0.172	0.111	0.016
	8	0.000	0.000	0.001	0.004	0.023	0.081	0.177	0.257	0.258	0.221	0.071
	9	0.000	0.000	0.000	0.001	0.005	0.027	0.089	0.200	0.258	0.295	0.213
	10	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.005	0.027	0.093	0.155	0.236	0.384
	11	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.004	0.020	0.042	0.086	0.314

Table I (continued)

n	x	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.75	0.8	0.9
12	0	0.282	0.069	0.032	0.014	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	1	0.377	0.206	0.127	0.071	0.017	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	2	0.230	0.283	0.232	0.168	0.064	0.016	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000
	3	0.085	0.236	0.258	0.240	0.142	0.054	0.012	0.001	0.000	0.000	0.000
	4	0.021	0.133	0.194	0.231	0.213	0.121	0.042	0.008	0.002	0.001	0.000
	5	0.004	0.053	0.103	0.158	0.227	0.193	0.101	0.029	0.011	0.003	0.000
	6	0.000	0.016	0.040	0.079	0.177	0.226	0.177	0.079	0.040	0.016	0.000
	7	0.000	0.003	0.011	0.029	0.101	0.193	0.227	0.158	0.103	0.053	0.004
	8	0.000	0.001	0.002	0.008	0.042	0.121	0.213	0.231	0.194	0.133	0.021
	9	0.000	0.000	0.000	0.001	0.012	0.054	0.142	0.240	0.258	0.236	0.085
	10	0.000	0.000	0.000	0.000	0.002	0.016	0.064	0.168	0.232	0.283	0.230
	11	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.003	0.017	0.071	0.127	0.206	0.377
	12	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.002	0.014	0.032	0.069	0.282
13	0	0.254	0.055	0.024	0.010	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	1	0.367	0.179	0.103	0.054	0.011	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	2	0.245	0.268	0.206	0.139	0.045	0.010	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
	3	0.100	0.246	0.252	0.218	0.111	0.035	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000
	4	0.028	0.154	0.210	0.234	0.184	0.087	0.024	0.003	0.001	0.000	0.000
	5	0.006	0.069	0.126	0.180	0.221	0.157	0.066	0.014	0.005	0.001	0.000
	6	0.001	0.023	0.056	0.103	0.197	0.209	0.131	0.044	0.019	0.006	0.000
	7	0.000	0.005	0.019	0.044	0.131	0.209	0.197	0.103	0.056	0.023	0.001
	8	0.000	0.001	0.005	0.014	0.066	0.157	0.221	0.180	0.126	0.069	0.006
	9	0.000	0.000	0.001	0.003	0.024	0.087	0.184	0.234	0.210	0.154	0.028
	10	0.000	0.000	0.000	0.001	0.006	0.035	0.111	0.218	0.252	0.246	0.100
	11	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.010	0.045	0.139	0.206	0.268	0.245
	12	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.002	0.011	0.054	0.103	0.179	0.367
	13	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.010	0.024	0.055	0.254
14	0	0.229	0.044	0.018	0.007	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	1	0.356	0.154	0.083	0.041	0.007	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	2	0.257	0.250	0.180	0.113	0.032	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
	3	0.114	0.250	0.240	0.194	0.085	0.022	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000
	4	0.035	0.172	0.220	0.229	0.155	0.061	0.014	0.001	0.000	0.000	0.000
	5	0.008	0.086	0.147	0.196	0.207	0.122	0.041	0.007	0.002	0.000	0.000
	6	0.001	0.032	0.073	0.126	0.207	0.183	0.092	0.023	0.008	0.002	0.000
	7	0.000	0.009	0.028	0.062	0.157	0.209	0.157	0.062	0.028	0.009	0.000
	8	0.000	0.002	0.008	0.023	0.092	0.183	0.207	0.126	0.073	0.032	0.001
	9	0.000	0.000	0.002	0.007	0.041	0.122	0.207	0.196	0.147	[illegible]	0.008
	10	0.000	0.000	0.000	0.001	0.014	0.061	0.155	0.229	0.220	0.172	0.035
	11	0.000	0.000	0.000	0.000	0.003	0.022	0.085	0.194	0.240	0.250	0.114
	12	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.006	0.032	0.113	0.180	0.250	0.257
	13	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.007	0.041	0.083	0.154	0.356
	14	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.007	0.018	0.044	0.229

Table I (continued)

n	x	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.75	0.8	0.9
15	0	0.206	0.035	0.013	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	1	0.343	0.132	0.067	0.031	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	2	0.267	0.231	0.156	0.092	0.022	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	3	0.129	0.250	0.225	0.170	0.063	0.014	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000
	4	0.043	0.188	0.225	0.219	0.127	0.042	0.007	0.001	0.000	0.000	0.000
	5	0.010	0.103	0.165	0.206	0.186	0.092	0.024	0.003	0.001	0.000	0.000
	6	0.002	0.043	0.092	0.147	0.207	0.153	0.061	0.012	0.003	0.001	0.000
	7	0.000	0.014	0.039	0.081	0.177	0.196	0.118	0.035	0.013	0.003	0.000
	8	0.000	0.003	0.013	0.035	0.118	0.196	0.177	0.081	0.039	0.014	0.000
	9	0.000	0.001	0.003	0.012	0.061	0.153	0.207	0.147	0.092	0.043	0.002
	10	0.000	0.000	0.001	0.003	0.024	0.092	0.186	0.206	0.165	0.103	0.010
	11	0.000	0.000	0.000	0.001	0.007	0.042	0.127	0.219	0.225	0.188	0.043
	12	0.000	0.000	0.000	0.000	0.002	0.014	0.063	0.170	0.225	0.250	0.129
	13	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.003	0.022	0.092	0.156	0.231	0.267
	14	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.005	0.031	0.067	0.132	0.343
	15	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.005	0.013	0.035	0.206
20	0	0.122	0.012	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	1	0.270	0.058	0.021	0.007	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	2	0.285	0.137	0.067	0.028	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	3	0.190	0.205	0.134	0.072	0.012	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	4	0.090	0.218	0.190	0.130	0.035	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	5	0.032	0.175	0.202	0.179	0.075	0.015	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
	6	0.009	0.109	0.169	0.192	0.124	0.037	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000
	7	0.002	0.055	0.112	0.164	0.166	0.074	0.015	0.001	0.000	0.000	0.000
	8	0.000	0.022	0.061	0.114	0.180	0.120	0.035	0.004	0.001	0.000	0.000
	9	0.000	0.007	0.027	0.065	0.160	0.160	0.071	0.012	0.003	0.000	0.000
	10	0.000	0.002	0.010	0.031	0.117	0.176	0.117	0.031	0.010	0.002	0.000
	11	0.000	0.000	0.003	0.012	0.071	0.160	0.160	0.065	0.027	0.007	0.000
	12	0.000	0.000	0.001	0.004	0.035	0.120	0.180	0.114	0.061	0.022	0.000
	13	0.000	0.000	0.000	0.001	0.015	0.074	0.166	0.164	0.112	0.055	0.002
	14	0.000	0.000	0.000	0.000	0.005	0.037	0.124	0.192	0.169	0.109	0.009
	15	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.015	0.075	0.179	0.202	0.175	0.032
	16	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.005	0.035	0.130	0.190	0.218	0.090
	17	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.012	0.072	0.134	0.205	0.190
	18	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.003	0.028	0.067	0.137	0.285
	19	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.007	0.021	0.058	0.270
	20	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.003	0.012	0.122

الجدول الثاني

توزيع بواسون حيث الوسط الحسابي = μ ، المتغير العشوائي = X

TABLE OF POISSON PROBABILITIES

For a given value of μ, entry indicates the probability of obtaining a specified value of X

X	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	.9048	.8187	.7408	.6703	.6065	.5488	.4966	.4493	.4066	.3679
1	.0905	.1637	.2222	.2681	.3033	.3293	.3476	.3595	.3659	.3679
2	.0045	.0164	.0333	.0536	.0758	.0988	.1217	.1438	.1647	.1839
3	.0002	.0011	.0033	.0072	.0126	.0198	.0284	.0383	.0494	.0613
4	.0000	.0001	.0003	.0007	.0016	.0030	.0050	.0077	.0111	.0153
5	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004	.0007	.0012	.0020	.0031
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0003	.0005
7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

X	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0	.3329	.3012	.2725	.2466	.2231	.2019	.1827	.1653	.1496	.1353
1	.3662	.3614	.3543	.3452	.3347	.3230	.3106	.2975	.2842	.2707
2	.2014	.2169	.2303	.2417	.2510	.2584	.2640	.2678	.2700	.2707
3	.0738	.0867	.0998	.1128	.1255	.1378	.1496	.1607	.1710	.1804
4	.0203	.0260	.0324	.0395	.0471	.0551	.0636	.0723	.0812	.0902
5	.0045	.0062	.0084	.0111	.0141	.0176	.0216	.0260	.0309	.0361
6	.0008	.0012	.0018	.0026	.0035	.0047	.0061	.0078	.0098	.0120
7	.0001	.0002	.0003	.0005	.0008	.0011	.0015	.0020	.0027	.0034
8	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0003	.0005	.0006	.0009
9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002

X	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
0	.1225	.1108	.1003	.0907	.0821	.0743	.0672	.0608	.0550	.0498
1	.2572	.2438	.2306	.2177	.2052	.1931	.1815	.1703	.1596	.1494
2	.2700	.2681	2652	.2613	.2565	.2510	.2450	.2384	.2314	.2240
3	.1890	.1966	.2033	.2090	.2138	.2176	.2205	.2225	.2237	.2240
4	.0992	.1082	.1169	.1254	.1336	.1414	.1488	.1557	.1622	.1680
5	.0417	.0476	.0538	.0602	.0668	.0735	.0804	.0872	.0940	.1008
6	.0146	.0174	.0206	.0241	.0278	.0319	.0362	.0407	.0455	.0504
7	.0044	.0055	.0068	.0083	.0099	.0118	.0139	.0163	.0188	.0216
8	0011	.0015	0019	.0025	.0031	0038	0047	.0057	.0068	.0081
9	.0003	.0004	0005	.0007	.0009	.0011	0014	.0018	0022	.0027
10	.0001	0001	0001	.0002	.0002	.0003	.0004	.0005	.0006	.0008
11	.0000	.0000	0000	.0000	.0000	0001	.0001	.0001	.0002	.0002
12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

X	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0
0	.0450	.0408	0369	.0334	.0302	.0273	.0247	.0224	.0202	.0183
1	.1397	.1304	.1217	.1135	.1057	.0984	.0915	.0850	.0789	.0733
2	.2165	.2087	2008	.1929	.1850	.1771	.1692	.1615	.1539	1465
3	.2237	.2226	.2209	.2186	.2158	.2125	.2087	.2046	.2001	.1954
4	.1734	.1781	.1823	.1858	.1888	.1912	.1931	.1944	.1951	.1954
5	1075	1140	1203	1264	.1322	1377	1429	1477	1522	1563
6	0555	0608	0662	0716	0771	0826	0881	0936	0989	1042
7	0246	0278	0312	0348	0385	0425	0466	0508	0551	0595
8	0095	0111	0129	0148	0169	0191	0215	0241	0269	0298
9	.0033	.0040	0047	.0056	.0066	.0076	0089	0102	.0116	.0132

Table E.6

TABLE OF POISSON PROBABILITIES

For a given value of μ, entry indicates the probability of obtaining a specified value of X

X	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	.9048	.8187	.7408	.6703	.6065	.5488	.4966	.4493	.4066	.3679
1	.0905	.1637	.2222	.2681	.3033	.3293	.3476	.3595	.3659	.3679
2	.0045	.0164	.0333	.0536	.0758	.0988	.1217	.1438	.1647	.1839
3	.0002	.0011	.0033	.0072	.0126	.0198	.0284	.0383	.0494	.0613
4	.0000	.0001	.0003	.0007	.0016	.0030	.0050	.0077	.0111	.0153
5	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004	.0007	.0012	.0020	.0031
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0003	.0005
7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

X	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0	.3329	.3012	.2725	.2466	.2231	.2019	.1827	.1653	.1496	.1353
1	.3662	.3614	3543	.3452	.3347	.3230	.3106	.2975	.2842	.2707
2	.2014	.2169	.2303	.2417	.2510	.2584	.2640	2678	.2700	.2707
3	0738	.0867	.0998	.1128	.1255	.1378	.1496	.1607	.1710	.1804
4	.0203	.0260	.0324	.0395	.0471	.0551	.0636	0723	.0812	.0902
5	0045	.0062	.0084	.0111	.0141	.0176	.0216	0260	.0309	.0361
6	.0008	.0012	.0018	.0026	.0035	.0047	.0061	.0078	.0098	.0120
7	.0001	.0002	.0003	.0005	.0008	.0011	.0015	.0020	.0027	.0034
8	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0003	.0005	.0006	.0009
9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002

X	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
0	.1225	.1108	.1003	.0907	.0821	.0743	.0672	.0608	0550	.0498
1	.2572	.2438	.2306	.2177	.2052	.1931	.1815	.1703	.1596	1494
2	.2700	.2681	.2652	.2613	.2565	.2510	.2450	.2384	.2314	.2240
3	.1890	.1966	.2033	.2090	.2138	.2176	.2205	.2225	.2237	.2240
4	.0992	.1082	.1169	.1254	.1336	.1414	.1488	.1557	.1622	.1680
5	.0417	.0476	.0538	.0602	.0668	.0735	.0804	.0872	.0940	.1008
6	.0146	.0174	.0206	.0241	.0278	.0319	.0362	.0407	.0455	.0504
7	.0044	.0055	.0068	.0083	.0099	.0118	.0139	.0163	.0188	.0216
8	.0011	.0015	.0019	.0025	.0031	.0038	.0047	.0057	.0068	.0081
9	.0003	.0004	.0005	.0007	.0009	0011	0014	.0018	0022	.0027
10	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0004	.0005	.0006	0008
11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	0001	0001	.0001	0002	.0002
12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	0000	0000	.0000	0000	0001

X	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0
0	.0450	.0408	.0369	.0334	.0302	0273	0247	.0224	0202	0183
1	.1397	.1304	.1217	.1135	.1057	.0984	.0915	.0850	.0789	0733
2	2165	.2087	.2008	.1929	.1850	.1771	.1692	.1615	.1539	1465
3	.2237	2226	.2209	.2186	2158	.2125	2087	.2046	.2001	1954
4	.1734	.1781	.1823	.1858	.1888	.1912	.1931	.1944	.1951	.1954
5	1075	.1140	.1203	.1264	.1322	.1377	.1429	.1477	1522	1563
6	.0555	0608	.0662	0716	.0771	0826	0881	0936	0989	1042
7	.0246	.0278	.0312	.0348	0385	.0425	0466	.0508	0551	0595
8	0095	0111	.0129	.0148	0169	0191	.0215	0241	0269	0298
9	.0033	.0040	0047	.0056	0066	.0076	0089	0102	0116	0132

Table E.6 (Continued)

X	μ 3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0
10	.0010	.0013	.0016	.0019	.0022	.0028	.0033	.0039	.0045	.0053
11	.0003	.0004	.0005	.0006	.0007	.0009	.0011	.0013	.0016	.0019
12	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0005	.0006
13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002
14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

X	μ 4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5.0
0	.0166	.0150	.0136	.0123	.0111	.0101	.0091	.0082	.0074	.0067
1	.0679	.0630	.0583	.0540	.0500	.0462	.0427	.0395	.0365	.0337
2	.1393	.1323	.1254	.1188	.1125	.1063	.1005	.0948	.0894	.0842
3	.1904	.1852	.1798	.1743	.1687	.1631	.1574	.1517	.1460	.1404
4	.1951	.1944	.1933	.1917	.1898	.1875	.1849	.1820	.1789	.1755
5	.1600	.1633	.1662	.1687	.1708	.1725	.1738	.1747	.1753	.1755
6	.1093	.1143	.1191	.1237	.1281	.1323	.1362	.1398	.1432	.1462
7	.0640	.0686	.0732	.0778	.0824	.0869	.0914	.0959	.1002	.1044
8	.0328	.0360	.0393	.0428	.0463	.0500	.0537	.0575	.0614	.0653
9	.0150	.0168	.0188	.0209	.0232	.0255	.0280	.0307	.0334	.0363
10	.0061	.0071	.0081	.0092	.0104	.0118	.0132	.0147	.0164	.0181
11	.0023	.0027	.0032	.0037	.0043	.0049	.0056	.0064	.0073	.0082
12	.0008	.0009	.0011	.0014	.0016	.0019	.0022	.0026	.0030	.0034
13	.0002	.0003	.0004	.0005	.0006	.0007	.0008	.0009	.0011	.0013
14	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0005
15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002

X	μ 5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6.0
0	.0061	.0055	.0050	.0045	.0041	.0037	.0033	.0030	.0027	.0025
1	.0311	.0287	.0265	.0244	.0225	.0207	.0191	.0176	.0162	.0149
2	.0793	.0746	.0701	.0659	.0618	.0580	.0544	.0509	.0477	.0446
3	.1348	.1293	.1239	.1185	.1133	.1082	.1033	.0985	.0938	.0892
4	.1719	.1681	.1641	.1600	.1558	.1515	.1472	.1428	.1383	.1339
5	.1753	.1748	.1740	.1728	.1714	.1697	.1678	.1656	.1632	.1606
6	.1490	.1515	.1537	.1555	.1571	.1584	.1594	.1601	.1605	.1606
7	.1086	.1125	.1163	.1200	.1234	.1267	.1298	.1326	.1353	.1377
8	.0692	.0731	.0771	.0810	.0849	.0887	.0925	.0962	.0998	.1033
9	.0392	.0423	.0454	.0486	.0519	.0552	.0586	.0620	.0654	.0688
10	.0200	.0220	.0241	.0262	.0285	.0309	.0334	.0359	.0386	.0413
11	.0093	.0104	.0116	.0129	.0143	.0157	.0173	.0190	.0207	.0225
12	.0039	.0045	.0051	.0058	.0065	.0073	.0082	.0092	.0102	.0113
13	.0015	.0018	.0021	.0024	.0028	.0032	.0036	.0041	.0046	.0052
14	.0006	.0007	.0008	.0009	.0011	.0013	.0015	.0017	.0019	.0022
15	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0005	.0006	.0007	.0008	.0009
16	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003
17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001

Table E.6 (*Continued*)

X	μ = 6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8	6.9	7.0
0	.0022	.0020	.0018	.0017	.0015	.0014	.0012	.0011	.0010	.0009
1	.0137	.0126	.0116	.0106	.0098	.0090	.0082	.0076	.0070	.0064
2	.0417	.0390	.0364	.0340	.0318	.0296	.0276	.0258	.0240	.0223
3	.0848	.0806	.0765	.0726	.0688	.0652	.0617	.0584	.0552	.0521
4	.1294	.1249	.1205	.1162	.1118	.1076	.1034	.0992	.0952	.0912
5	.1579	.1549	.1519	.1487	.1454	.1420	.1385	.1349	.1314	.1277
6	.1605	.1601	.1595	.1586	.1575	.1562	.1546	.1529	.1511	.1490
7	.1399	.1418	.1435	.1450	.1462	.1472	.1480	.1486	.1489	.1490
8	.1066	.1099	.1130	.1160	.1188	.1215	.1240	.1263	.1284	.1304
9	.0723	.0757	.0791	.0825	.0858	.0891	.0923	.0954	.0985	.1014
10	.0441	.0469	.0498	.0528	.0558	.0588	.0618	.0649	.0679	.0710
11	.0245	.0265	.0285	.0307	.0330	.0353	.0377	.0401	.0426	.0452
12	.0124	.0137	.0150	.0164	.0179	.0194	.0210	.0227	.0245	.0264
13	.0058	.0065	.0073	.0081	.0089	.0098	.0108	.0119	.0130	.0142
14	.0025	.0029	.0033	.0037	.0041	.0046	.0052	.0058	.0064	.0071
15	.0010	.0012	.0014	.0016	.0018	.0020	.0023	.0026	.0029	.0033
16	.0004	.0005	.0005	.0006	.0007	.0008	.0010	.0011	.0013	.0014
17	.0001	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0004	.0005	.0006
18	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002
19	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001

X	μ = 7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	8.0
0	.0008	.0007	.0007	.0006	.0006	.0005	.0005	.0004	.0004	.0003
1	.0059	.0054	.0049	.0045	.0041	.0038	.0035	.0032	.0029	.0027
2	.0208	.0194	.0180	.0167	.0156	.0145	.0134	.0125	.0116	.0107
3	.0492	.0464	.0438	.0413	.0389	.0366	.0345	.0324	.0305	.0286
4	.0874	.0836	.0799	.0764	.0729	.0696	.0663	.0632	.0602	.0573
5	.1241	.1204	.1167	.1130	.1094	.1057	.1021	.0986	.0951	.0916
6	.1468	.1445	.1420	.1394	.1367	.1339	.1311	.1282	.1252	.1221
7	.1489	.1486	.1481	.1474	.1465	.1454	.1442	.1428	.1413	.1396
8	.1321	.1337	.1351	.1363	.1373	.1382	.1388	.1392	.1395	.1396
9	.1042	.1070	.1096	.1121	.1144	.1167	.1187	.1207	.1224	.1241
10	.0740	.0770	.0800	.0829	.0858	.0887	.0914	.0941	.0967	.0993
11	.0478	.0504	.0531	.0558	.0585	.0613	.0640	.0667	.0695	.0722
12	.0283	.0303	.0323	.0344	.0366	.0388	.0411	.0434	.0457	.0481
13	.0154	.0168	.0181	.0196	.0211	.0227	.0243	.0260	.0278	.0296
14	.0078	.0086	.0095	.0104	.0113	.0123	.0134	.0145	.0157	.0169
15	.0037	.0041	.0046	.0051	.0057	.0062	.0069	.0075	.0083	.0090
16	.0016	.0019	.0021	.0024	.0026	.0030	.0033	.0037	.0041	.0045
17	.0007	.0008	.0009	.0010	.0012	.0013	.0015	.0017	.0019	.0021
18	.0003	.0003	.0004	.0004	.0005	.0006	.0006	.0007	.0008	.0009
19	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0003	.0004
20	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002
21	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001

Table E.6 (Continued)

X	μ 8.1	8.2	8.3	8.4	8.5	8.6	8.7	8.8	8.9	9.0
0	.0003	.0003	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0001	.0001
1	.0025	.0023	.0021	.0019	.0017	.0016	.0014	.0013	.0012	.0011
2	.0100	.0092	.0086	.0079	.0074	.0068	.0063	.0058	.0054	.0050
3	.0269	.0252	.0237	.0222	.0208	.0195	.0183	.0171	.0160	.0150
4	.0544	.0517	.0491	.0466	.0443	.0420	.0398	.0377	.0357	.0337
5	.0882	.0849	.0816	.0784	.0752	.0722	.0692	.0663	.0635	.0607
6	.1191	.1160	.1128	.1097	.1066	.1034	.1003	.0972	.0941	.0911
7	.1378	.1358	.1338	.1317	.1294	.1271	.1247	.1222	.1197	.1171
8	.1395	.1392	.1388	.1382	.1375	.1366	.1356	.1344	.1332	.1318
9	1256	.1269	.1280	.1290	.1299	.1306	.1311	.1315	.1317	.1318
10	.1017	.1040	.1063	.1084	.1104	.1123	.1140	.1157	.1172	.1186
11	.0749	.0776	.0802	.0828	.0853	.0878	.0902	.0925	.0948	.0970
12	.0505	.0530	.0555	.0579	.0604	.0620	.0654	.0679	.0703	.0728
13	.0315	.0334	.0354	.0374	.0395	.0416	.0438	.0459	.0481	.0504
14	.0182	.0196	.0210	.0225	.0240	.0256	.0272	.0289	.0306	.0324
15	.0098	.0107	.0116	.0126	.0136	.0147	.0158	.0169	.0182	.0194
16	.0050	.0055	.0060	.0066	.0072	.0079	.0086	.0093	.0101	.0109
17	.0024	.0026	.0029	.0033	.0036	.0040	.0044	.0048	.0053	.0058
18	.0011	.0012	.0014	.0015	.0017	.0019	.0021	.0024	.0026	.0029
19	.0005	.0005	.0006	.0007	.0008	.0009	.0010	.0011	.0012	.0014
20	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0004	.0005	.0005	.0006
21	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0002	.0003
22	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001

X	μ 9.1	9.2	9.3	9.4	9.5	9.6	9.7	9.8	9.9	10
0	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0000
1	.0010	.0009	.0009	.0008	.0007	.0007	.0006	.0005	.0005	.0005
2	.0046	.0043	.0040	.0037	.0034	.0031	.0029	.0027	.0025	.0023
3	.0140	.0131	.0123	.0115	.0107	.0100	.0093	.0087	.0081	.0076
4	.0319	.0302	.0285	.0269	.0254	.0240	.0226	.0213	.0201	.0189
5	.0581	.0555	.0530	.0506	.0483	.0460	.0439	.0418	.0398	.0378
6	.0881	.0551	.0822	.0793	.0764	.0736	.0709	.0682	.0656	.0631
7	.1145	.1118	.1091	.1064	.1037	.1010	.0982	.0955	.0928	.0901
8	.1302	.1286	.1269	.1251	.1232	.1212	.1191	.1170	.1148	.1126
9	.1317	.1315	.1311	.1306	.1300	.1293	.1284	.1274	.1263	.1251
10	.1198	.1210	.1219	.1228	.1235	.1241	.1245	.1249	.1250	.1251
11	.0991	.1012	.1031	.1049	.1067	.1083	.1098	.1112	.1125	.1137
12	.0752	.0776	.0799	.0822	.0844	.0866	.0888	.0908	.0928	.0948
13	.0526	.0549	.0572	.0594	.0617	.0640	.0662	.0685	.0707	.0729
14	.0342	.0361	.0380	.0399	.0419	.0439	.0459	.0479	.0500	.0521
15	.0208	.0221	.0235	.0250	.0265	.0281	.0297	.0313	.0330	.0347
16	.0118	.0127	.0137	.0147	.0157	.0168	.0180	.0192	.0204	.0217
17	.0063	.0069	.0075	.0081	.0088	.0095	.0103	.0111	.0119	.0128
18	.0032	.0035	.0039	.0042	.0046	.0051	.0055	.0060	.0065	.0071
19	.0015	.0017	.0019	.0021	.0023	.0026	.0028	.0031	.0034	.0037

Table E.6 (Continued)

X	μ 9.1	9.2	9.3	9.4	9.5	9.6	9.7	9.8	9.9	10
20	.0007	.0008	.0009	.0010	.0011	.0012	.0014	.0015	.0017	.0019
21	.0003	.0003	.0004	.0004	.0005	.0006	.0006	.0007	.0008	.0009
22	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0004
23	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002
24	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001

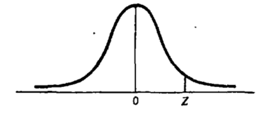
X	μ 11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
1	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
2	.0010	.0004	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
3	.0037	.0018	.0008	.0004	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
4	.0102	.0053	.0027	.0013	.0006	.0003	.0001	.0001	.0000	.0000
5	.0224	.0127	.0070	.0037	.0019	.0010	.0005	.0002	.0001	.0001
6	.0411	.0255	.0152	.0087	.0048	.0026	.0014	.0007	.0004	.0002
7	.0646	.0437	.0281	.0174	.0104	.0060	.0034	.0018	.0010	.0005
8	.0888	.0655	.0457	.0304	.0194	.0120	.0072	.0042	.0024	.0013
9	.1085	.0874	.0661	.0473	.0324	.0213	.0135	.0083	.0050	.0029
10	.1194	.1048	.0859	.0663	.0486	.0341	.0230	.0150	.0095	.0058
11	.1194	.1144	.1015	.0844	.0663	.0496	.0355	.0245	.0164	.0106
12	.1094	.1144	.1099	.0984	.0829	.0661	.0504	.0368	.0259	.0176
13	.0926	.1056	.1099	.1060	.0956	.0814	.0658	.0509	.0378	.0271
14	.0728	.0905	.1021	.1060	.1024	.0930	.0800	.0655	.0514	.0387
15	.0534	.0724	.0885	.0989	.1024	.0992	.0906	.0786	.0650	.0516
16	.0367	.0543	.0719	.0866	.0960	.0992	.0963	.0884	.0772	.0646
17	.0237	.0383	.0550	.0713	.0847	.0934	.0963	.0936	.0863	.0760
18	.0145	.0256	.0397	.0554	.0706	.0830	.0909	.0936	.0911	.0844
19	.0084	.0161	.0272	.0409	.0557	.0699	.0814	.0887	.0911	.0888
20	.0046	.0097	.0177	.0286	.0418	.0559	.0692	.0798	.0866	.0888
21	.0024	.0055	.0109	.0191	.0299	.0426	.0560	.0684	.0783	.0846
22	.0012	.0030	.0065	.0121	.0204	.0310	.0433	.0560	.0676	.0769
23	.0006	.0016	.0037	.0074	.0133	0216	.0320	.0438	.0559	.0669
24	.0003	.0008	.0020	.0043	.0083	.0144	.0226	.0328	.0442	.0557
25	.0001	.0004	.0010	.0024	.0050	.0092	.0154	.0237	.0336	.0446
26	.0000	.0002	.0005	.0013	.0029	.0057	.0101	.0164	.0246	.0343
27	.0000	.0001	.0002	.0007	.0016	.0034	.0063	.0109	.0173	.0254
28	.0000	.0000	.0001	.0003	.0009	.0019	.0038	.0070	.0117	0181
29	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004	.0011	.0023	.0044	.0077	.0125
30	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0006	.0013	.0026	.0049	.0083
31	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0007	.0015	.0030	.0054
32	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0004	.0009	.0018	.0034
33	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0005	.0010	.0020
34	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0006	.0012
35	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	0003	.0007
36	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004
37	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002
38	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
39	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

SOURCE: Extracted from William H. Beyer (ed.), *CRC Basic Statistical Tables* (Cleveland: The Chemical Rubber Co., 1971).

الجدول الثالث

التوزيع العادى المعيارى

Table E.2
THE STANDARDIZED NORMAL DISTRIBUTION



Entry represents area under the standardized normal distribution from the mean to Z

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2612	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.49865	.49869	.49874	.49878	.49882	.49886	.49889	.49893	.49897	.49900
3.1	.49903	.49906	.49910	.49913	.49916	.49918	.49921	.49924	.49926	.49929
3.2	.49931	.49934	.49936	.49938	.49940	.49942	.49944	.49946	.49948	.49950
3.3	.49952	.49953	.49955	.49957	.49958	.49960	.49961	.49962	.49964	.49965
3.4	.49966	.49968	.49969	.49970	.49971	.49972	.49973	.49974	.49975	.49976
3.5	.49977	.49978	.49978	.49979	.49980	.49981	.49981	.49982	.49983	.49983
3.6	.49984	.49985	.49985	.49986	.49986	.49987	.49987	.49988	.49988	.49989
3.7	.49989	.49990	.49990	.49990	.49991	.49991	.49992	.49992	.49992	.49992
3.8	.49993	.49993	.49993	.49994	.49994	.49994	.49994	.49995	.49995	.49995
3.9	.49995	.49995	.49996	.49996	.49996	.49996	.49996	.49996	.49997	.49997

الجدول الرابع

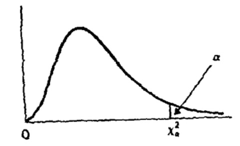
توزيع t

TABLE F The *t*-Distribution

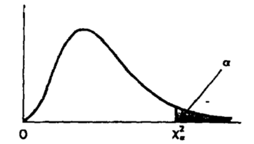
Two tailed-Test	0.900	0.700	0.500	0.300	0.200	0.100	0.050	0.020	0.010	α va
	0.100	0.300	0.500	0.700	0.800	0.900	0.950	0.980	0.990	CL
one Tailed-Test	0.450	0.350	0.250	0.150	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	α va
	0.550	0.650	0.750	0.850	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995	CL
d.f.	Values of *t*									
1	0.158	0.510	1.000	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	
2	0.142	0.445	0.816	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	
3	0.137	0.424	0.765	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	
4	0.134	0.414	0.741	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	
5	0.132	0.408	0.727	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	
6	0.131	0.404	0.718	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	
7	0.130	0.402	0.711	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	
8	0.130	0.399	0.706	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	
9	0.129	0.398	0.703	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	
10	0.129	0.397	0.700	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	
11	0.129	0.396	0.697	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	
12	0.128	0.395	0.695	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	
13	0.128	0.394	0.694	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	
14	0.128	0.393	0.692	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	
15	0.128	0.393	0.691	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	
16	0.128	0.392	0.690	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	
17	0.128	0.392	0.689	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	
18	0.127	0.392	0.688	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	
19	0.127	0.391	0.688	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	
20	0.127	0.391	0.687	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	
21	0.127	0.391	0.686	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	
22	0.127	0.390	0.686	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	
23	0.127	0.390	0.685	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	
24	0.127	0.390	0.685	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	
25	0.127	0.390	0.684	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	
26	0.127	0.390	0.684	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	
27	0.127	0.389	0.684	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	
28	0.127	0.389	0.683	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	
29	0.127	0.389	0.683	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	
30	0.127	0.389	0.683	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	
40	0.126	0.388	0.681	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	
60	0.126	0.387	0.679	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	
120	0.126	0.386	0.677	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	
∞	0.126	0.385	0.674	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	

الجدول الخامس

توزيع كـا^2 "chi-square"

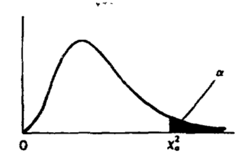


df	$\chi^2_{0.995}$	$\chi^2_{0.99}$	$\chi^2_{0.975}$	$\chi^2_{0.95}$	$\chi^2_{0.05}$	$\chi^2_{0.025}$	$\chi^2_{0.01}$	$\chi^2_{0.005}$
1	0.000	0.000	0.001	0.004	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	11.070	12.832	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	36.415	39.364	42.980	45.558
25	10.520	11.524	13.120	14.611	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	40.113	43.194	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	43.773	46.979	50.892	53.672



df	$\chi^2_{0.995}$	$\chi^2_{0.99}$	$\chi^2_{0.975}$	$\chi^2_{0.95}$	$\chi^2_{0.05}$	$\chi^2_{0.025}$	$\chi^2_{0.01}$	$\chi^2_{0.005}$	df
1	0.000	0.000	0.001	0.004	3.841	5.024	6.635	7.879	1
2	0.010	0.020	0.051	0.103	5.991	7.378	9.210	10.597	2
3	0.072	0.115	0.216	0.352	7.815	9.348	11.345	12.838	3
4	0.207	0.297	0.484	0.711	9.488	11.143	13.277	14.860	4
5	0.412	0.554	0.831	1.145	11.070	12.832	15.086	16.750	5
6	0.676	0.872	1.237	1.635	12.592	14.449	16.812	18.548	6
7	0.989	1.239	1.690	2.167	14.067	16.013	18.475	20.278	7
8	1.344	1.646	2.180	2.733	15.507	17.535	20.090	21.955	8
9	[illegible]	2.088	2.700	3.325	16.919	19.023	21.666	23.589	9
10	[illegible]	[illegible]	3.247	3.940	18.307	20.483	23.209	25.188	10
11	2.603	3.053	3.816	4.575	19.675	21.920	24.725	26.757	11
12	3.074	3.571	4.404	5.226	21.026	23.337	26.217	28.300	12
13	3.565	[illegible]	5.009	5.892	22.362	24.736	27.688	29.819	13
14	4.075	4.660	5.629	6.571	23.685	26.119	29.141	31.319	14
15	4.601	5.229	6.262	7.261	24.996	27.488	30.578	32.801	15
16	5.142	5.812	6.908	7.962	26.296	28.845	32.000	34.267	16
17	5.697	6.408	7.564	8.672	27.587	30.191	33.409	35.718	17
18	6.265	7.015	8.231	9.390	28.869	31.526	34.805	37.156	18
19	6.844	7.633	8.907	10.117	30.144	32.852	36.191	38.582	19
20	7.434	8.260	9.591	10.851	31.410	34.170	37.566	39.997	20
21	8.034	8.897	10.283	11.591	32.671	35.479	38.932	41.401	21
22	8.643	9.542	10.982	12.338	33.924	36.781	40.289	42.796	22
23	9.260	10.196	11.689	13.091	35.172	38.076	41.638	44.181	23
24	9.886	10.856	12.401	13.848	36.415	39.364	42.980	45.558	24
25	10.520	11.524	13.120	14.611	37.652	40.646	44.314	46.928	25
26	11.160	12.198	13.844	15.379	38.885	41.923	45.642	48.290	26
27	11.808	12.879	14.573	16.151	40.113	43.194	46.963	49.645	27
28	12.461	13.565	15.308	16.928	41.337	44.461	48.278	50.993	28
29	13.121	14.256	16.047	17.708	42.557	45.722	49.588	52.336	29
30	13.787	14.953	16.791	18.493	43.773	[illegible]	50.892	53.672	30

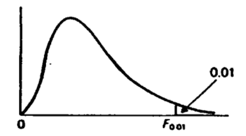
Chi-square distribution (Values of χ^2_α)



df	$\chi^2_{0.995}$	$\chi^2_{0.99}$	$\chi^2_{0.975}$	$\chi^2_{0.95}$	$\chi^2_{0.05}$	$\chi^2_{0.025}$	$\chi^2_{0.01}$	$\chi^2_{0.005}$
1	0.000	0.000	0.001	0.004	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	11.070	12.832	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	36.415	39.364	42.980	45.558
25	10.520	11.524	13.120	14.611	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	40.113	43.194	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	43.773	46.979	50.892	53.672

الجدول السادس

توزيـــع F



df for numerator

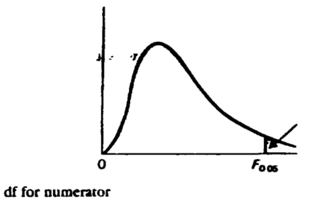
df for denominator	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4052	4999.5	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39
13	9.0	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41

Adapted from D. B. Owen, *Handbook of Statistical Tables*. Courtesy of the Atomic Energy Commission. Reading, MA: Addison-Wesley, 1962

Table VI (continued)

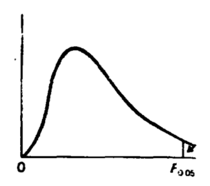
df for denominator	df for numerator: 10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49	99.50
3	27.23	27.05	26.87	26.69	26.60	26.50	26.41	26.32	26.22	26.13
4	14.55	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
5	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	3.09	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
27	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
28	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
29	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

Table VII Values of $F_{0.05}$



df for denominator	df for numerator: 1	2	3	4	5	6	7	8
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94

Table VII Values of $F_{0.05}$



df for denominator	df for numerator: 1	2	3	4	5	6	7	8
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94

الجدول السابع

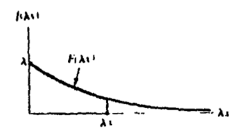
جدول الاعداد العشوائية

63271	59986	71744	51102	15141	80714	58683	93108	13554	79945
88547	09896	95436	79115	08303	01041	20030	63754	08459	28364
55957	57243	83865	09911	19761	66535	40102	26646	60147	15702
46276	87453	44790	67122	45573	84358	21625	16999	13385	22782
55363	07449	34835	15290	76616	67191	12777	21861	68689	03263
69393	92785	49902	58447	42048	30378	87618	26933	40640	16281
13186	29431	88190	04588	38733	81290	89541	70290	40113	08243
17726	28652	56836	78351	47327	18518	92222	55201	27340	10493
36520	64465	05550	30157	82242	29520	69753	72602	23756	54935
81628	36100	39254	56835	37636	02421	98063	89641	64953	99337
84649	48968	75215	75498	49539	74240	03466	49292	36401	45525
63291	11618	12613	75055	43915	26488	41116	64531	56827	30825
70502	53225	03655	05915	37140	57051	48393	91322	25653	06543
06426	24771	59935	49801	11082	66762	94477	02494	88215	27191
70711	55609	29430	70165	45406	78484	31639	52009	18873	96927
41900	70538	77191	25860	55204	73417	83920	69468	74972	38712
72432	36618	76298	26678	89134	33938	95567	29380	75906	91807
[illegible]	40318	57099	10528	09925	89773	41335	96244	29802	46453
53766	52875	15987	46962	67342	77592	57651	95508	80033	69828
90585	58955	53122	16025	84299	53310	67380	84249	25348	04332
12001	96293	17203	64516	51530	37069	40261	61374	05815	06714
62606	64324	46154	72157	67248	20135	49804	09226	64419	29457
10078	28073	85389	50324	14900	15562	64165	06125	71353	77669
91561	46145	24177	15294	10061	98124	75732	00815	83452	97355
13091	98112	53959	79607	52244	63303	10413	63839	74762	50289
72864	83014	72457	22682	03033	61714	88173	90835	00634	85169
66648	25467	48894	51043	02365	91726	09365	63167	95264	45643
83745	41042	29493	01836	09044	51926	43630	63470	76508	14194
46068	26805	94595	47907	13357	38412	33318	26098	82782	42851
54310	96175	97594	88616	42035	38093	36745	56702	40644	83514
14877	33095	10924	58013	61439	21882	42059	24177	58739	60170
78295	23179	02771	43464	59061	71411	05697	67194	30495	21157
67524	02865	39593	54278	04237	92441	26602	63835	38032	94770
58268	57219	68124	73455	83236	08710	04284	55005	84171	42596
97158	28672	50685	01181	24262	19427	52106	34308	73685	74246
04230	16831	69085	30802	65559	09205	71829	06489	85650	38707
94879	56606	30401	02602	57658	20091	54986	41394	60437	03195
71446	15232	66715	26385	91518	70566	02888	79941	39684	54315
32886	05644	79316	09819	00813	88407	17461	73925	53037	91904
62048	33711	25290	21526	02223	75947	66466	06232	10913	75336
84534	42351	21628	53669	81352	95152	08107	98814	72743	12549
84707	15885	84710	[illegible]	[illegible]	56311	32648	88141	73902	[illegible]
19409	40868	64220	50961	13560	68491	52988	26374	[illegible]	49052
57978	48015	25073	[illegible]	45924	56144	24742	96702	88200	66162
57295	98298	11199	96510	75228	41600	47192	41267	[illegible]	23152

الجدول الثامن

جدول التوزيع الأسي

Values of $F(\lambda x)$ where X has the exponential distribution



λx	$F(\lambda x)$	λx	$F(\lambda x)$	λx	$F(\lambda x)$	λx	$F(\lambda x)$
0.0	0.000	2.5	0.918	5.0	0.9933	7.5	0.99945
0.1	0.095	2.6	0.926	5.1	0.9939	7.6	0.99950
0.2	0.181	2.7	0.933	5.2	0.9945	7.7	0.99955
0.3	0.259	2.8	0.939	5.3	0.9950	7.8	0.99959
0.4	0.330	2.9	0.945	5.4	0.9955	7.9	0.99963
0.5	0.393	3.0	0.950	5.5	0.9959	8.0	0.99966
0.6	0.451	3.1	0.955	5.6	0.9963	8.1	0.99970
0.7	0.503	3.2	0.959	5.7	0.9967	8.2	0.99972
0.8	0.551	3.3	0.963	5.8	0.9970	8.3	0.99975
0.9	0.593	3.4	0.967	5.9	0.9973	8.4	0.99978
1.0	0.632	3.5	0.970	6.0	0.9975	8.5	0.99980
1.1	0.667	3.6	0.973	6.1	0.9978	8.6	0.99982
1.2	0.699	3.7	0.975	6.2	0.9980	8.7	0.99983
1.3	0.727	3.8	0.978	6.3	0.9982	8.8	0.99985
1.4	0.753	3.9	0.980	6.4	0.9983	8.9	0.99986
1.5	0.777	4.0	0.982	6.5	0.9985	9.0	0.99989
1.6	0.798	4.1	0.983	6.6	0.9986	9.1	0.99989
1.7	0.817	4.2	0.985	6.7	0.9988	9.2	0.99990
1.8	0.835	4.3	0.986	6.8	0.9989	9.3	0.99991
1.9	0.850	4.4	0.988	6.9	0.9990	9.4	0.99992
2.0	0.865	4.5	0.989	7.0	0.9991	9.5	0.99992
2.1	0.878	4.6	0.990	7.1	0.9992	9.6	0.99993
2.2	0.889	4.7	0.991	7.2	0.9993	9.7	0.99994
2.3	0.900	4.8	0.992	7.3	0.9993	9.8	0.99994
2.4	0.909	4.9	0.993	7.4	0.9993	9.9	0.99995

Example: *If $\lambda = \frac{1}{4}$, the probability of observing a value of X less than or equal to 2 is $F(\lambda x) = F[(\frac{1}{4})(2)] = F(\frac{1}{2}) = 0.393$.*

الجدول التاسع

SQUARES, SQUARE ROOTS, AND RECIPROCALS 1-1000

N	N^2	$\sqrt{N}$	$\sqrt{10N}$	$1/N$ .00
150	22 500	12.24745	38.72983	6666667
151	22 801	12.28821	38.85872	6622517
152	23 104	12.32883	38.98718	6578947
153	23 409	12.36932	39.11521	6535948
154	23 716	12.40967	39.24283	6493506
155	24 025	12.44990	39.37004	6451613
156	24 336	12.49000	39.49684	6410256
157	24 649	12.52996	39.62323	6369427
158	24 964	12.56981	39.74921	6329114
159	25 281	12.60952	39.87480	6289308
160	25 600	12.64911	40.00000	6250000
161	25 921	12.68858	40.12481	6211180
162	26 244	12.72792	40.24922	6172840
163	26 569	12.76715	40.37326	6134969
164	26 896	12.80625	40.49691	6097561
165	27 225	12.84523	40.62019	6060606
166	27 556	12.88410	40.74310	6024096
167	27 889	12.92285	40.86563	5988024
168	28 224	12.96148	40.98780	5952381
169	28 561	13.00000	41.10961	5917160
170	28 900	13.03840	41.23106	5882353
171	29 241	13.07670	41.35215	5847953
172	29 584	13.11488	41.47288	5813953
173	29 929	13.15295	41.59327	5780347
174	30 276	13.19091	41.71331	5747126
175	30 625	13.22876	41.83300	5714286
176	30 976	13.26650	41.95235	5681818
177	31 329	13.30413	42.07137	5649718
178	31 684	13.34166	42.19005	5617978
179	32 041	13.37909	42.30839	5586592
180	32 400	13.41641	42.42641	5555556
181	32 761	13.45362	42.54409	5524862
182	33 124	13.49074	42.66146	5494505
183	33 489	13.52775	42.77850	5464481
184	33 856	13.56466	42.89522	5434783
185	34 225	13.60147	43.01163	5405405
186	34 596	13.63818	43.12772	5376344
187	34 969	13.67479	43.24350	5347594
188	35 344	13.71131	43.35897	5319149
189	35 721	13.74773	43.47413	5291005
190	36 100	13.78405	43.58899	5263158
191	36 481	13.82027	43.70355	5235602
192	36 864	13.85641	43.81780	5208333
193	37 249	13.89244	43.93177	5181347
194	37 636	13.92839	44.04543	5154639
195	38 025	13.96424	44.15880	5128205
196	38 416	14.00000	44.27189	5102041
197	38 809	14.03567	44.38468	5076142
198	39 204	14.07125	44.49719	5050505
199	39 601	14.10674	[illegible].60942	5025126
200	40 000	14.14214	[illegible].72136	5000000

الجداول الإحصائية

تجميع

الأستاذ الدكتور/عادل عبد الحميد عز


Bibliotheca Alexandrina
06668957